

UQO

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC D'OUTAOUAIS

DÉPARTEMENT DES SCIENCES ADMINISTRATIVES

PROGRAMME DE MAÎTRISE EN ADMINISTRATION DES AFFAIRES

AVEC MÉMOIRE - CONCENTRATION SERVICES FINANCIERS

Options réelles et investissements pétroliers :

Effet du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC D'OUTAOUAIS

Par AHLONSOU MAHUGNON FIRMIN

SUPERVISÉ Par TANDJA MBIANDA DJERRY CHARLI

VILLE : GATINEAU

AOÛT 2025

TABLE DES MATIÈRES

Résumé (Français)	7
Abstract (English).....	8
1 Introduction.....	9
2 Revue de la littérature.....	11
2.1 Théorie des options réelles et fondements conceptuels	11
2.2 Application des options réelles aux investissements pétroliers	13
2.3 Présentation et limites du modèle de Chorn et Shokhor (2006)	15
2.4 Incertitudes affectant la valeur de l'option d'attendre.....	16
2.5 Méthodes d'évaluation des investissements en présence d'incertitude.....	17
2.6 Dynamiques d'investissement dans le secteur pétrolier	18
3 Modélisation du risque géopolitique du risque géopolitique	20
3.1 Justification du recours à un modèle de convergence déterministe avec forçage exogène ..	20
3.2 Modélisation.....	21
Graphique 1 : Effet du risque initial R_0 ($A = 0,4$; $K = 0,05$) sur l'évolution de $R(t)$	23
3.3 Intégration dans la valeur déterministe de l'option d'attendre	26
3.3.1 Adaptation de la formule de valorisation en fonction du niveau de risque	26
3.3.2 Simulations : Comportement de l'option d'attendre selon le niveau de risque et la vitesse de dissipation A	28
3.4 Étude de sensibilité	33
3.4.1 Effets des variations de $R(t)$ sur la valeur d'attendre.....	34
3.4.2 Effets croisés avec la volatilité et les asymétries d'information	35
4. Extension du modèle de Chorn et Shokhor (2006)	36
4.1 Rappel du modèle de base	36
4.2 Intégration du risque géopolitique dans le processus de décision	37
4.2.1. Prise en compte du risque dans la valorisation des projets.....	38
4.2.2. Interactions entre $R(t)$ et les probabilités de transition décisionnelle $P(s' s)$	39
4.2.3 Implications sur les décisions séquentielles : attendre, investir ou abandonner	39
4.2.3.1 Décision séquentielle $D(t)$ (Expansion, Ralentissement, Abandon)	39
4.2.3.2 Implication de $R(t)$ sur les décisions séquentielles.....	43
4.2.4 Synthèse des effets stratégiques de $R(t)$	43
4.3 Nouveaux chemins décisionnels sous contrainte géopolitique	44
4.3.1 Arbre décisionnel enrichi par $R(t)$	44

4.3.2. Analyse des zones de décision : abstention, attente, investissement	44
4.3.4. Apport stratégique de la modélisation par $R(t)$	45
5 Analyse des résultats	45
5.1 Effets du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre	45
5.1.1 Comparaison avec le modèle sans risque $R(t)=0$	45
5.1.2 Détection des seuils critiques où l'option d'attendre est rentable.....	46
5.2 Simulation des trajectoires d'investissement	47
5.2.1 Études de scénarios selon le niveau de risque	47
5.2.2 Représentation graphique : valeur de l'option en fonction du temps.....	47
5.3 Rôle de la réduction de l'asymétrie d'information	48
5.3.1 Comparaison de la volatilité de $S(t)$ à celle de $X(t)$	48
5.3.2 Réduction de l'asymétrie d'information en lien avec les variances de $S(t)$ et $X(t)$	53
5.3.3 Gain de valeur sous risque élevé	55
5.3.4 Avantage stratégique de l'information en environnement hostile.....	55
5.4 Corrélation, méthodologie économétrique	55
5.4.1. Corrélation et simulations	56
5.4.1.1 Corrélation entre $R(t)$ et $V(t, R(t))$	56
5.4.1.2 Corrélation entre $R(t)$ et les décisions $D(t)$	57
5.4.1.3 Corrélation entre réduction de l'asymétrie et $V(t)$	61
5.4.2 Méthodologie économétrique	62
5.4.2.1 Relation entre $R(t)$ et $V(t, R(t))$	62
5.4.2.2 Relation entre les décisions $D(t)$ et le risque $R(t)$	63
5.4.2.3 Relation entre la réduction de l'asymétrie d'information et l'augmentation x de $V(t, R(t))$	65
5.5 Tests statistiques.....	65
5.5.1 Tests de Student pour échantillons appariés (Tests latéraux droits)	66
5.5.1.1 Test général $V(t, R(t))$ -Apparié	66
5.5.1.2 Test au moment critique T_0 ($V(T_0, R(T_0))$) -Apparié	66
5.5.2.1 Test général du χ^2 sur les décisions ($D(t)$).....	66
5.5.2.2 Test du χ^2 au moment critique T_0 de ($D(T_0)$).....	67
5.5.3 – Tests de Student unilatéraux gauche : Impact de $R(t)$ sur expansion	67
5.5.3.1 Test général	67
5.5.3.2 Test au temps optimal T_0 : Impact de $R(T_0)$ sur l'expansion	67

5.5.4 Tests de Student unilatéraux gauche : impact de $R(t)$ sur les décisions d'abandon des projets pétroliers	68
5.5.4.1 Test général	68
5.5.5 Tests de Student unilatéraux droits sur l'effet de l'amélioration de l'information	68
5.5.5.1 Test général sur l'effet de l'amélioration de l'information	68
5.5.5.2 Test au moment critique T_0	69
5.5.6 Conclusions sur les tests d'hypothèses	70
5.6 Interprétation des résultats issus des différents tests	71
5.6.1 Confirmation de l'effet négatif du risque géopolitique	72
5.6.2 Détection des seuils critiques R_c	72
5.6.3 Effets de la vitesse de dissipation A	72
5.6.4 Rôle des chocs exogènes $K(t)$	72
5.6.5 Sensibilité croisée avec volatilité et asymétries d'information.....	73
5.6.6 Interprétation globale et implications stratégiques.....	73
6. Discussion	73
6.1 Apports du modèle étendu	73
6.1.1 Prise en compte explicite du risque géopolitique	74
6.1.2 Identification de seuils critiques de rentabilité.....	74
6.1.3 Importance de la dynamique de dissipation du risque	74
6.1.4 Rôle des chocs exogènes dans l'instabilité.....	74
6.1.5 Comparaison avec le modèle sans risque	75
6.1.6 Apports stratégiques pour la décision d'investissement	75
6.2 Limites méthodologiques et théoriques	75
6.2.1 Limites liées à la modélisation du risque géopolitique	76
6.2.2 Limites liées aux hypothèses financières	76
6.2.3 Limites empiriques et de calibration	76
6.2.4 Limites théoriques liées aux options réelles	76
6.2.5 Discussion critique.....	77
7. Conclusion et recommandations.....	77
7.1 Conclusion générale	77
7.2 Implications théoriques.....	78
7.3 Implications pratiques	78
7.4 Recommandations pour les décideurs publics et privés.....	78

7.5 Perspectives de recherche	79
8.Bibliographie.....	80
ANNEXE F : Modélisation du risque géopolitique	83
Annexe G : Équations de Bellman utilisée dans le modèle de Chorn et Shokor(2006).....	91
Annexe (G') : Équations de Bellman ajusté par le risqué R(t)	94
Annexe H : Modélisation de l'option d'attendre dans le modèle de Chorn et Shokhor (2006)...	95
Annexe (H') : Extension de la valeur de l'option d'attendre au risque R(t)	101
Annexe I : Tableaux	111

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été rendue possible grâce au soutien de plusieurs personnes que je souhaite remercier chaleureusement.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, le professeur Djerry Charli Tandja Mbianda pour son accompagnement rigoureux, ses conseils éclairés et sa disponibilité constante.

Mes remerciements s'adressent également à toute l'équipe professorale du département des sciences administratives pour l'excellence de l'encadrement reçu.

Un merci tout particulier à ma famille et à mes proches pour leur soutien moral, leur patience et leur encouragement tout au long de ce parcours académique.

À toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire : merci infiniment.

Résumé (Français)

Ce mémoire analyse l'impact du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre dans les projets d'investissement pétroliers. En mobilisant une extension du modèle de Chorn et Shokhor (2006), nous avons introduit une dynamique du risque définie par $R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At}$, où R_0 représente le risque initial, $K(t)$ les chocs exogènes liés aux tensions et aux interventions internationales et A la vitesse de dissipation du risque.

Les simulations réalisées mettent en évidence plusieurs comportements :

- En absence de risque ($R=0$), la valeur de l'option est maximale. Dans ce cas, l'attente constitue une stratégie optimale : l'investisseur bénéficie pleinement de la flexibilité offerte par l'option réelle, et les projets pétroliers conservent leur attractivité stratégique.
- En présence d'un risque faible ou modéré, l'option conserve une valeur positive et reste exploitable. Toutefois, elle atteint un maximum au seuil critique R_c , au-delà duquel sa valeur diminue rapidement. Ce résultat implique que les entreprises doivent identifier et surveiller ce seuil : tant que le risque reste inférieur à R_c , retarder l'investissement peut créer de la valeur, mais au-delà il devient préférable d'agir rapidement.
- En situation de risque élevé, l'option perd presque toute sa valeur. L'attente ne constitue plus une stratégie viable : l'incertitude géopolitique annihile la valeur de flexibilité. Dans ce cas, l'implication managériale est de privilégier soit une entrée immédiate (avant détérioration accrue), soit un abandon du projet, selon les conditions économiques et financières.

Comparée au modèle sans risque, cette approche met en évidence une réduction systématique de la valeur stratégique de l'attente, tout en identifiant les configurations dans lesquelles l'option demeure pertinente.

Les résultats offrent des implications théoriques, en renforçant l'intégration du risque géopolitique dans la théorie des options réelles, et des implications pratiques, en soulignant la nécessité d'outils de couverture (assurances MIGA, clauses contractuelles de stabilisation, stratégies de diversification géographique) et de mécanismes d'adaptation permettant de préserver une partie de la valeur stratégique des projets.

Enfin, ce mémoire ouvre des perspectives de recherche sur l'intégration simultanée d'autres sources de risque (environnementaux, technologiques, réglementaires) et sur l'usage de méthodes numériques avancées (simulations de Monte Carlo, équations différentielles stochastiques) pour traiter des cas complexes et mieux orienter les décisions d'investissement pétrolières.

Abstract (English)

This thesis examines the impact of geopolitical risk on the value of the option to wait in oil investment projects. Building on an extension of the Chorn and Shokhor's (2006) model, we introduce a dynamic formulation of risk defined as

$$R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At},$$

where R_0 represents the initial risk, $K(t)$ the exogenous shocks associated with international tensions and interventions, and A the speed of risk dissipation.

The simulations highlight several patterns:

- In the absence of risk ($R=0$), the option value is maximized. Waiting is then an optimal strategy, allowing the investor to fully benefit from the flexibility of real options, while oil projects retain their strategic attractiveness.
- Under low or moderate risk, the option remains valuable and positive, but it reaches a maximum at a critical threshold R_c , beyond which its value decreases rapidly. This implies that firms must identify and monitor this threshold: as long as risk remains below R_c , postponing investment may create value; beyond it, immediate action becomes preferable.
- In a high-risk environment, the option loses almost all its value. Waiting is no longer viable since geopolitical instability destroys the value of flexibility. In such cases, firms must either invest immediately (before further deterioration) or abandon the project, depending on market and financial conditions.

Compared to the risk-free model, this extended approach systematically demonstrates a reduction in the strategic value of waiting, while identifying the specific conditions under which the option remains relevant.

The results provide theoretical implications, by improving the integration of geopolitical risk into real options theory, and practical implications, by emphasizing the need for risk management instruments (such as MIGA insurance, contractual stabilization clauses, and geographic diversification) to preserve part of the strategic value of oil projects.

Finally, the thesis opens avenues for future research on the joint integration of other sources of uncertainty (environmental, technological, regulatory) and on the use of advanced numerical methods (Monte Carlo simulations, stochastic differential equations) to address more complex cases and better guide investment decisions in the oil sector.

1 Introduction

L'industrie pétrolière, pilier central de l'économie mondiale, opère dans un environnement où l'incertitude géopolitique occupe une place grandissante. Les tensions internationales, les sanctions économiques, les conflits armés et l'instabilité institutionnelle affectent de plus en plus la rentabilité et la faisabilité des projets pétroliers. Ces risques géopolitiques, souvent exogènes et difficilement maîtrisables, influencent fortement les comportements d'investissement, notamment en augmentant la volatilité des flux de trésorerie et en incitant les entreprises à reporter ou abandonner certains projets (Caldara et Iacoviello, 2019). Pourtant, les modèles traditionnels d'évaluation des investissements et même plusieurs approches fondées sur les options réelles intègrent rarement de manière explicite cette composante stratégique. Dans un secteur aussi exposé que celui du pétrole, l'omission du risque géopolitique constitue une limite importante des cadres décisionnels actuels.

L'analyse des décisions d'investissement en contexte d'incertitude a été profondément marquée par les travaux fondateurs de Bemanke (1980). Dans son modèle sur le calendrier optimal d'un investissement irréversible c'est-à-dire un investissement dont les coûts engagés ne peuvent être récupérés en cas d'abandon il introduit la notion d'option d'attente. Selon ce cadre, un investisseur rationnel devrait retarder la prise de décision jusqu'à l'obtention d'informations nouvelles susceptibles de réduire l'incertitude et d'améliorer la rentabilité attendue du projet. Ce principe a ensuite été intégré à la théorie des options réelles, qui modélise la flexibilité managériale en présence d'incertitude, notamment à travers l'option de différer un investissement.

Un tournant majeur dans la modélisation des décisions d'investissement a été apporté par Milne et Whalley (1996), qui ont élargi le cadre théorique des options réelles en l'adaptant à des situations où les investissements sont irréversibles et soumis à des contraintes techniques telles que l'ordonnancement des dépenses d'investissement surtout dans les secteurs miniers. En particulier, leur travail a introduit le modèle d'options réelles comme un outil permettant aux investisseurs de prendre des décisions flexibles, en utilisant la notion d'option d'attendre, permettant ainsi d'ajuster les investissements en fonction des nouvelles informations disponibles. L'application au secteur pétrolier reste en développement, notamment en ce qui concerne l'intégration des risques géopolitiques, un aspect qui n'avait pas été suffisamment pris en compte dans les recherches antérieures.

Power et al. (2014) ont proposé à travers leur étude intitulée Mesurer la valeur de l'option de l'investissement dans les infrastructures un cadre basé sur le risque pour estimer la valeur de l'option de l'investissement en infrastructure en tenant compte du comportement stochastique des variables financiers et physiques. Dans leur démarche méthodologique, ils avaient utilisé l'approche d'option réelle et la méthode de Monte-Carlo des moindres carrés pour calculer les dates d'investissements optimaux et les valeurs d'option. Ils ont aussi montré la nécessité de modéliser les risques financiers et techniques pour mieux comprendre le calendrier d'investissement et la valeur de l'option réelle de l'investissement dans les infrastructures. Mais leur étude est limitée par la non intégration de certains risques spécifiques à savoir risque souverain, risque d'expropriation, risque opérationnel et surtout le risque géopolitique

L'étude de Chorn et Shokhor (2006) représente une avancée significative dans la modélisation des investissements pétroliers en intégrant l'incertitude économique partiellement observable dans la valorisation de l'option d'attendre. Toutefois, ce modèle ne tient pas compte du risque géopolitique en tant que tel, ni de ses effets indirects sur les variables économiques observables. Il suppose également que l'acquisition d'information parfaite permet de lever l'incertitude, sans considérer que certaines incertitudes comme celles liées aux conflits géopolitiques peuvent persister ou s'aggraver

Dans le secteur pétrolier, cette flexibilité d'attente constitue un levier stratégique essentiel pour faire face à la volatilité des prix, aux aléas des coûts de production et aux fluctuations de la demande. Toutefois, les modèles classiques d'options réelles, bien qu'efficaces pour intégrer les risques économiques et financiers, négligent généralement les dimensions géopolitiques. Cette omission limite leur capacité à appréhender deux éléments fondamentaux : d'une part, l'impact du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre, et d'autre part, l'effet d'une réduction de l'asymétrie d'information dans un environnement géopolitiquement instable. En conséquence, l'exclusion explicite du risque géopolitique restreint la portée prédictive de ces modèles et leur aptitude à simuler fidèlement les trajectoires de décision des investisseurs pétroliers. Ces derniers doivent souvent ajuster leurs stratégies d'entrée, de désengagement ou d'expansion en fonction d'événements politiques imprévus, rendant indispensable l'intégration de ces facteurs dans les modèles décisionnels contemporains.

. Cette lacune théorique justifie pleinement l'importance de la présente étude qui cherche à combler cette attente en intégrant au modèle de Chorn et Shokhor(2006) une équation dynamique représentant le risque géopolitique. Ainsi l'objectif principal de cette extension vise à réévaluer la valeur de l'option d'attendre et à observer comment les résultats et les trajectoires de décisions optimales évoluent en fonction de ce nouveau paramètre. Les questions de recherche qui en découlent sont les suivantes : Comment le risque géopolitique affecte-t-il la valeur de l'option d'attendre dans les décisions d'investissement pétrolier? Quels sont les effets d'une réduction d'asymétrie d'information dans un environnement géopolitiquement instable?

Pour mettre en évidence ces questions, une revue de littérature approfondie sur les fondements des options réelles et les investissements a été menée. Nous l'avons regroupée en six thèmes principaux. En effet le premier groupe illustre la théorie des options réelles et fondements conceptuels (Black et Scholes (1973), Merton (1973) , Bernanke (1980), McDonald et Siegel (1986) , Dixit et Pindyck (1994) , Kester (1984) , Trigeorgis (1995) , Bowman et Hurry (1993) ,Gamba et Trigeorgis (2007) , Copeland et Antikarov (2001)) ,le deuxième thème porte sur l'application des options réelles aux investissements pétroliers (Bernanke (1980), Dixit et Pindyck (1994) , Milne et Whalley (1996) , Chorn et Shokhor (2006)), le troisième thème regroupe la présentation et les limites du modèle de Chorn et Shokhor(Dixit et Pindyck (1994) , Chorn et Shokhor (2006)) ,le quatrième thème s'articule incertitudes affectant la valeur de l'option d'attendre (McDonald et Siegel (1986) , Dixit et Pindyck (1994), Caldara et Iacoviello (2019)) , le cinquième thème mentionne les méthodes d'évaluation des investissements en présence d'incertitudes(Black et Scholes (1973)

Caldara et Iacoviello (2019)) et enfin le sixième thème les dynamiques en présence d'incertitudes (Dixit et Pindyck (1994), Hamilton (2009), Kellogg (2014), Anderson et al. (2018), McDonald et Siegel (1986), Paddock et al. (1988), Bekaert, Harvey et Ng (2005), Caldara et Iacoviello (2019), IEA (2023), Trigeorgis (1995), World Bank (2022))

Au-delà de cette approche classique, ce mémoire propose également une modélisation déterministe du risque géopolitique, intégrée au modèle de valorisation de l'option d'attendre. Cette modélisation dynamique permet d'observer l'évolution de la valeur de l'option dans le temps en fonction du niveau de risque géopolitique, mais aussi d'évaluer son influence sur les chemins décisionnels : moment optimal d'investissement, conditions d'entrée, ou abandon d'un projet. Cette intégration vise à combler une lacune majeure dans la littérature, en tenant compte à la fois de l'incertitude irréductible et des mécanismes de réduction de l'asymétrie d'information dans les décisions stratégiques du secteur pétrolier. Ce travail contribue ainsi à enrichir la compréhension théorique et pratique de la gestion de l'incertitude dans l'investissement énergétique à l'ère des tensions géopolitiques accrues.

Les résultats obtenus offrent aux investisseurs pétroliers un cadre décisionnel plus réaliste, intégrant le risque géopolitique dans la valorisation des projets. Ils permettent d'identifier le moment optimal d'investissement, d'exploiter la valeur stratégique de l'attente, de structurer des projets flexibles multi-phases, de tenir compte des effets croisés avec la volatilité économique et l'asymétrie d'information, et de renforcer la veille stratégique pour ajuster rapidement les décisions.

Le reste du document se déroule comme suit : La deuxième section présente une revue de la littérature sur les options réelles et le risque géopolitique. Quant à la troisième section, elle développe la modélisation du risque géopolitique. Ensuite la quatrième section traite de l'extension du modèle de Chorn et Shokhor(2006). Puis la cinquième section est consacrée à l'analyse des résultats. De plus la sixième section traite de la discussion des résultats .Enfin la septième section s'occupe de la conclusion générale et fait des recommandations.

2 Revue de la littérature

Notre revue de littérature s'articulera autour de six points à savoir : la Théorie des options réelles et fondements conceptuels, l'application des options réelles aux investissements pétroliers, la présentation et limites du modèle de Chorn et Shokhor (2006), les incertitudes affectant la valeur de l'option d'attendre, les méthodes d'évaluation des investissements en présence d'incertitude et enfin les dynamiques d'investissement dans le secteur pétrolier

2.1 Théorie des options réelles et fondements conceptuels

La théorie des options réelles constitue une avancée majeure dans l'analyse des décisions d'investissement en environnement incertain, en particulier lorsqu'il s'agit de projets irréversibles, complexes et fortement exposés aux aléas externes, comme c'est le cas dans le secteur pétrolier. Elle s'inspire directement des travaux fondateurs de Black et Scholes

(1973) et de Merton (1973) sur les options financières, lesquels ont permis d'élaborer un cadre mathématique rigoureux pour évaluer la valeur des droits conditionnels à exercer une action future.

Transposée aux investissements réels, cette approche repose sur une idée centrale : tout projet d'investissement comportant une part d'irréversibilité dans un contexte d'incertitude offre une valeur additionnelle liée à la possibilité de reporter, d'adapter ou d'annuler la décision selon l'évolution des conditions futures. Cette flexibilité managériale, souvent ignorée par les modèles classiques d'évaluation fondés sur la valeur actuelle nette (VAN), devient une source stratégique de création de valeur. C'est dans ce contexte que l'option d'attendre prend toute son importance, en particulier dans les environnements où l'incertitude est persistante et non totalement éliminable.

L'un des premiers à formaliser ce concept d'attente comme stratégie optimale a été Bemanke (1980), qui a montré que dans un environnement d'incertitude macroéconomique, la décision de différer un investissement irréversible peut être justifiée par la valeur de l'information acquise en attendant. En d'autres termes, l'investisseur rationnel maximise la valeur de son projet non pas nécessairement en agissant immédiatement, mais en exploitant la possibilité d'attendre que de nouvelles informations viennent réduire l'incertitude.

Cette intuition a été formalisée de manière plus rigoureuse par McDonald et Siegel (1986), qui ont introduit une approche quantitative de l'option d'attendre en utilisant les outils de la finance mathématique (processus stochastiques, équations différentielles partielles). Leur modèle montre que la valeur d'un investissement peut dépasser la VAN si l'on intègre la possibilité de différer la décision jusqu'à un seuil optimal, déterminé par les caractéristiques du projet et la dynamique du risque.

L'apport décisif de Dixit et Pindyck (1994) fut de généraliser cette approche à une large gamme de projets industriels, en montrant que l'actualisation classique ne suffit pas à capturer les dynamiques réelles des choix d'investissement. Leur ouvrage constitue aujourd'hui la référence incontournable dans le domaine, en articulant la notion d'option réelle avec les caractéristiques d'irréversibilité, d'incertitude et de flexibilité stratégique. Ils ont ainsi démontré que l'attente devient une stratégie optimale dès lors que l'environnement est incertain et que les investissements sont coûteux à annuler.

Cette vision a été enrichie par des auteurs comme Kester (1984), Trigeorgis (1995) et Bowman et Hurry (1993), qui ont élargi le spectre des options réelles au-delà de l'option d'attendre. Ces auteurs ont introduit les options d'expansion, de contraction, d'abandon ou encore de séquençement des investissements, qui permettent aux entreprises de moduler leur exposition au risque tout au long du cycle de vie d'un projet.

En particulier, Trigeorgis (1995) a proposé une classification complète des types d'options réelles et montré comment les combiner dans un cadre d'analyse intégré, donnant naissance à une véritable théorie de la gestion stratégique par options. Gamba et Trigeorgis (2007)

ont poursuivi dans cette voie en développant des outils de simulation permettant de valoriser des portefeuilles complexes d'options réelles dans des environnements incertains.

Enfin, les travaux de Copeland et Antikarov (2001) ont permis la diffusion pratique de cette approche en entreprise, grâce à l'utilisation de la méthode de Monte Carlo et des arbres binomiaux pour estimer la valeur des options stratégiques dans des contextes réels.

Toutefois, malgré la puissance analytique de ces modèles, la littérature en options réelles a longtemps négligé certains risques exogènes non économiques, notamment le risque géopolitique, qui ne suit pas nécessairement une dynamique stochastique financière standard. De même, l'asymétrie d'information et l'irréductibilité de certaines incertitudes comme celles liées à des conflits armés ou à des sanctions internationales sont peu intégrées dans les modèles canoniques.

Cette lacune méthodologique justifie l'intérêt de ce mémoire, qui propose une extension du cadre classique des options réelles en y intégrant une modélisation convergente déterministe avec forçage exogène du risque géopolitique, sous forme d'équation différentielle dynamique. L'objectif est de rendre compte plus fidèlement des contraintes spécifiques auxquelles sont confrontés les projets pétroliers, en revalorisant la fonction stratégique de l'option d'attendre dans des contextes de tension géopolitique accrue.

2.2 Application des options réelles aux investissements pétroliers

Le secteur pétrolier constitue un terrain d'application privilégié pour la théorie des options réelles en raison de la nature même de ses projets d'investissement, marqués par une forte intensité capitalistique, une irréversibilité des coûts engagés et une exposition accrue à de multiples sources d'incertitude. Ces caractéristiques rendent les décisions d'investissement particulièrement sensibles aux chocs externes, notamment économiques, politiques, environnementaux et surtout géopolitiques, comme le souligne l'introduction du présent mémoire.

Les projets pétroliers, en particulier ceux liés à l'exploration et au développement de gisements, mobilisent des ressources considérables sur des horizons de temps longs. Ils requièrent des engagements initiaux élevés, qui ne peuvent être récupérés en cas d'interruption ou d'échec du projet. Cette irréversibilité constitue l'une des justifications fondamentales à l'utilisation du cadre des options réelles : elle confère une valeur stratégique à l'attente, en permettant aux entreprises de différer ou séquencer leurs investissements en fonction de l'évolution des conditions de marché et de l'environnement externe.

Dans un tel contexte, la flexibilité managériale devient un levier essentiel de création de valeur. L'option d'attendre permet, par exemple, à une entreprise de suspendre temporairement une décision d'engagement, le temps d'obtenir des informations plus précises sur les prix du pétrole, les conditions géopolitiques dans le pays hôte, ou encore la stabilité des régulations fiscales. Cette faculté de temporiser avant d'investir prend toute son importance dans les pays producteurs exposés aux tensions politiques, aux sanctions

économiques, ou aux conflits armés, facteurs que les modèles traditionnels d'évaluation peinent à intégrer pleinement.

Les travaux de Bemanke (1980), puis de Dixit et Pindyck (1994), ont démontré que l'incertitude, combinée à l'irréversibilité, accroît la valeur de l'option d'attendre. Appliquée aux projets pétroliers, cette logique justifie l'observation empirique selon laquelle les compagnies pétrolières internationales retardent souvent leurs investissements malgré des conditions économiques apparemment favorables. Ce comportement n'est pas le signe d'une inefficacité ou d'une inertie, mais bien d'une gestion stratégique de l'information et du risque.

L'importance de cette approche a été renforcée par les travaux de Milne et Whalley (1996), qui ont mis en évidence la nécessité d'adapter le cadre des options réelles à des secteurs soumis à des contraintes techniques fortes, comme les infrastructures minières ou pétrolières. En introduisant la notion d'ordonnancement des investissements, ils ont souligné que les décisions ne sont pas toujours binaires (investir ou attendre), mais souvent séquentielles et imbriquées dans des logiques de développement à plusieurs étapes. Cette complexité décisionnelle s'observe notamment dans les projets pétroliers à grande échelle, où la phase exploratoire précède des phases de développement et de production plus coûteuses, chacune pouvant être retardée, abandonnée ou adaptée selon les signaux externes.

L'étude de Chorn et Shokhor (2006) s'inscrit dans cette lignée, en proposant un modèle décisionnel séquentiel adapté aux investissements pétroliers. Leur approche intègre des incertitudes économiques observables comme les prix du brut mais reste limitée dans sa capacité à saisir des risques plus structurels, tels que les aléas géopolitiques, qui demeurent pourtant déterminants dans la faisabilité et la rentabilité des projets pétroliers. Or, les récentes crises (sanctions sur l'Iran, guerre en Ukraine, instabilités en Afrique subsaharienne) ont rappelé que les paramètres géopolitiques ne sont ni marginaux, ni transitoires, mais structurels dans la stratégie d'investissement énergétique mondiale.

En conséquence, l'application des options réelles aux investissements pétroliers exige aujourd'hui une extension du cadre analytique traditionnel. Il ne suffit plus d'intégrer la seule incertitude des prix ou des coûts : il est devenu crucial de modéliser l'impact dynamique du risque géopolitique et de l'asymétrie d'information, ainsi que leur interaction avec les trajectoires décisionnelles des firmes. C'est précisément cette lacune que le présent mémoire vise à combler, en proposant une extension déterministe du modèle de Chorn et Shokhor, dans laquelle le risque géopolitique est représenté comme une variable dynamique influençant directement la valeur de l'option d'attendre.

En résumé, les options réelles offrent un cadre particulièrement pertinent pour analyser les investissements pétroliers, en permettant d'intégrer la flexibilité stratégique face à l'incertitude. Toutefois, dans un monde géopolitiquement instable, cette flexibilité doit désormais être réévaluée à la lumière de nouveaux paramètres exogènes qui redéfinissent les frontières du risque dans l'industrie pétrolière mondiale.

2.3 Présentation et limites du modèle de Chorn et Shokhor (2006)

Le modèle développé par Chorn et Shokhor (2006) représente une contribution importante à la littérature sur les options réelles appliquées aux investissements pétroliers. Prolongeant les travaux de Dixit et Pindyck (1994), il propose un cadre structurant pour modéliser les décisions d'investissement dans un environnement incertain, en prenant en compte la nature séquentielle et flexible des projets à forte intensité capitaliste comme ceux du secteur énergétique.

L'un des apports majeurs de ce modèle réside dans son approche fondée sur des chemins décisionnels ramifiés, qui permet de représenter les différentes phases d'un projet (exploration, développement, production) comme autant d'étapes stratégiques. À chaque moment, l'investisseur peut décider d'attendre, d'engager des fonds ou de se retirer, en fonction des informations nouvellement acquises. Cette dynamique s'appuie sur une programmation optimale tenant compte de variables économiques partiellement observables, telles que les prix du pétrole ou les coûts d'exploitation. Ainsi, le modèle permet de capturer la valeur stratégique de l'attente, en identifiant les seuils critiques au-delà desquels une décision devient optimale.

Par ailleurs, un aspect méthodologique original du modèle tient à sa capacité à gérer l'incertitude partiellement observable. Reconnaissant que les données économiques pertinentes ne soient pas toujours connues de manière directe, Chorn et Shokhor introduisent la possibilité d'un apprentissage progressif par l'acquisition d'information. Ce mécanisme justifie le report de certaines décisions d'investissement dans l'attente de signaux plus clairs, ce qui renforce la pertinence du recours à l'option d'attendre. Toutefois, cette incertitude reste essentiellement de nature économique ou technique, modélisable par des processus stochastiques classiques, et évoluant selon des dynamiques continues.

C'est précisément cette orientation qui constitue la principale limite du modèle. En effet, l'une des grandes faiblesses du cadre de Chorn et Shokhor est l'absence de prise en compte explicite du risque géopolitique, un facteur pourtant déterminant dans l'industrie pétrolière. Ce type de risque qui comprend les conflits armés, les sanctions économiques, les instabilités institutionnelles ou encore les ruptures contractuelles ne suit pas des trajectoires continues et prévisibles. Il s'agit de risques exogènes, souvent discontinus, aux effets brusques et durables, difficilement modélisables par les approches probabilistes classiques.

Comme souligné dans l'introduction de ce mémoire, le risque géopolitique influence directement la valeur de l'option d'attendre en modifiant la perception de la stabilité future des flux de trésorerie, des droits de propriété ou des conditions réglementaires. L'absence de cette dimension dans le modèle empêche de rendre compte fidèlement des comportements stratégiques observés dans la réalité, notamment la tendance fréquente au report, à l'abandon ou à la redéfinition des projets dans les régions politiquement instables.

C'est dans ce contexte que s'inscrit la contribution du présent mémoire, qui vise à proposer une extension du modèle de Chorn et Shokhor par l'introduction d'une variable dynamique représentant le risque géopolitique. Contrairement aux variables économiques traitées

stochastiquement, cette variable est modélisée de manière déterministe à l'aide d'une équation différentielle de premier ordre avec second membre, permettant de décrire l'évolution temporelle du risque de manière structurée. Ce choix méthodologique offre une meilleure intégration de cette composante stratégique dans les équations de valorisation de l'option d'attendre.

Ainsi enrichi, le modèle permettra d'analyser plus finement l'effet du risque géopolitique sur les trajectoires de décision des investisseurs pétroliers, et de simuler l'impact potentiel d'une amélioration de l'information ou d'une décrue des tensions sur la valorisation des projets. Ce cadre théorique renouvelé constitue le fondement de la démarche développée dans les sections suivantes.

2.4 Incertitudes affectant la valeur de l'option d'attendre

La valeur de l'option d'attendre découle directement de la présence d'incertitude. Dans un environnement où les décisions d'investissement sont irréversibles et coûteuses, la possibilité de temporiser et d'agir ultérieurement constitue une source essentielle de flexibilité stratégique. Toutefois, toutes les incertitudes ne génèrent pas la même valeur, et leur impact dépend de leur nature, de leur dynamique d'évolution et de leur influence sur les anticipations futures. Trois formes majeures d'incertitude affectent la décision d'attente dans le contexte des investissements pétroliers : le risque géopolitique, l'asymétrie d'information et la volatilité économique.

Le risque géopolitique, d'abord, se distingue par son caractère exogène, discontinu et difficilement prévisible. Contrairement aux variables économiques qui évoluent de manière relativement régulière, les événements géopolitiques conflits, sanctions, renversements de régime, ruptures diplomatiques peuvent surgir brutalement et bouleverser les conditions de rentabilité d'un projet. Dans le secteur pétrolier, ce risque est particulièrement sensible en raison de la concentration des réserves dans des zones politiquement instables. Il affecte non seulement la sécurité physique des installations, mais aussi la stabilité des contrats, l'accès aux marchés et la possibilité d'obtenir un retour sur investissement. Plusieurs études empiriques, notamment celles fondées sur l'indice GPR (*Geopolitical Risk Index*), ont montré que les pics géopolitiques sont associés à un recul significatif des investissements directs étrangers (Caldara et Iacoviello, 2019). Dans un tel contexte, la valeur de l'option d'attendre augmente considérablement, car elle offre une protection contre l'engagement prématuré dans un environnement instable.

L'asymétrie d'information constitue une autre source d'incertitude importante, bien que de nature différente. Elle résulte d'un déséquilibre entre les informations détenues par les différents acteurs impliqués dans un projet, qu'il s'agisse des promoteurs, des investisseurs ou des autorités publiques. Cette asymétrie peut générer des phénomènes de sélection adverse où les bons projets sont ignorés faute de crédibilité ou d'aléa moral où les gestionnaires prennent des décisions risquées une fois les fonds obtenus. Dans le secteur pétrolier, l'opacité des données techniques, la complexité des ententes contractuelles et la dépendance à des acteurs étatiques renforcent cette asymétrie, limitant la capacité des investisseurs à évaluer correctement le risque réel (Akerlof, 1970). Face à cette incertitude

informationnelle, attendre permet d'acquérir progressivement de meilleures données ou de meilleurs signaux de marché, ce qui renforce à nouveau la valeur stratégique de la patience.

Enfin, la volatilité constitue une forme d'incertitude plus classique, mais non moins importante. Elle correspond à l'instabilité des variables économiques sous-jacentes, notamment le prix du pétrole, les coûts de production ou les taux d'intérêt. Une forte volatilité accroît le potentiel de gains futurs, mais également le risque de pertes, ce qui justifie l'attente tant que les conditions ne convergent pas vers un niveau de certitude acceptable. Ce principe est au cœur de la théorie des options réelles, comme l'ont démontré McDonald et Siegel (1986), puis Dixit et Pindyck (1994). Toutefois, la volatilité économique ne suffit plus, à elle seule, à expliquer les comportements d'attente observés. Dans les environnements modernes, elle interagit avec les autres formes d'incertitude notamment géopolitique et informationnelle pour produire des effets complexes sur la décision d'investissement.

Ainsi, la combinaison de ces trois incertitudes façonne de manière décisive la valeur de l'option d'attendre. Le présent mémoire propose de dépasser les approches traditionnelles en intégrant explicitement le risque géopolitique comme une variable dynamique dans le modèle d'évaluation. Cette intégration permettra de simuler plus finement les comportements d'attente stratégique des investisseurs dans un contexte instable, et d'évaluer l'effet d'une réduction de l'incertitude qu'elle soit informationnelle ou géopolitique sur les trajectoires optimales d'investissement.

2.5 Méthodes d'évaluation des investissements en présence d'incertitude

L'évaluation des projets d'investissement repose traditionnellement sur la méthode d'actualisation des flux de trésorerie futurs, en utilisant un taux d'actualisation censé refléter le coût du capital. Ce taux, généralement représenté par le coût moyen pondéré du capital (*Weighted Average Cost of Capital* WACC), intègre à la fois le coût de la dette et celui des capitaux propres (Brealey et al., 2020). La valeur actuelle nette (VAN), obtenue par cette méthode, est ainsi censée indiquer la rentabilité attendue du projet. Toutefois, dans des contextes d'incertitude élevée comme ceux du secteur pétrolier marqué par des fluctuations des prix, des tensions géopolitiques et des risques réglementaires cette approche linéaire se révèle largement insuffisante. Elle suppose en effet des flux prévisionnels stables et une connaissance raisonnable de l'environnement futur, conditions rarement réunies dans les projets énergétiques de long terme.

Face à ces limites, la théorie des options réelles (Dixit et Pindyck, 1994) s'est imposée comme un cadre alternatif pertinent, en transposant aux projets d'investissement les outils conceptuels et mathématiques développés pour l'évaluation des options financières. Elle permet de modéliser la flexibilité managériale comme une source de valeur, en considérant les décisions d'investissement, de report, d'expansion ou d'abandon comme des options exerçables dans des conditions incertaines. Contrairement à la VAN, qui évalue un projet de manière statique, l'approche par options réelles valorise le droit mais non l'obligation de procéder à l'investissement, en fonction de l'évolution des variables clés. Cette vision

dynamique correspond bien à la réalité des projets pétroliers, où les décisions sont prises progressivement, en réponse à l'évolution de l'information et des conditions de marché.

Plusieurs méthodes d'évaluation ont été mobilisées dans ce cadre. Le modèle de Black-Scholes, initialement conçu pour des options financières européennes, a été adapté aux projets réels sous des hypothèses simplificatrices. Le modèle binomial, plus souple, offre une représentation arborescente des trajectoires de prix, ce qui facilite la modélisation des décisions séquentielles. Les simulations de Monte Carlo permettent de traiter des situations complexes impliquant plusieurs sources d'incertitude, en générant un grand nombre de scénarios possibles. Enfin, les équations aux dérivées partielles, comme l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, sont utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation continue dans des environnements incertains. Ces méthodes permettent de mieux capter la valeur stratégique de la flexibilité, mais elles restent, dans la majorité des cas, focalisées sur des incertitudes économiques classiques (prix, coûts, taux).

Parallèlement, les approches économétriques récentes ont tenté d'élargir le champ de l'analyse en intégrant empiriquement l'impact de facteurs exogènes tels que les politiques publiques, les réglementations environnementales ou les tensions géopolitiques. Des modèles de régression, des séries temporelles ou des indices composites comme le Geopolitical Risk Index (Caldara et Iacoviello, 2019) permettent ainsi de quantifier l'effet de certains chocs sur les investissements à l'échelle macroéconomique. Ces travaux ont mis en évidence une forte corrélation entre la hausse du risque géopolitique et la baisse des investissements, mais leur capacité explicative reste limitée dans un cadre décisionnel prospectif. En effet, ils ne modélisent ni la flexibilité des agents, ni les choix séquentiels, ni l'arbitrage inter temporel entre action et inaction.

C'est dans cette perspective que s'inscrit l'apport du présent mémoire, qui propose de coupler les outils de la théorie des options réelles avec une modélisation déterministe du risque géopolitique, formulée par une équation différentielle linéaire de premier ordre. Ce choix permet d'intégrer explicitement le risque géopolitique dans la fonction de valorisation de l'option d'attendre, en en faisant une variable évolutive susceptible d'influencer les seuils d'investissement. Une telle intégration vise à dépasser les approches classiques qui traitent le risque comme un simple paramètre exogène ou une prime d'actualisation arbitraire. Elle offre un cadre plus robuste pour évaluer les projets pétroliers dans un environnement où la géopolitique devient un facteur stratégique aussi déterminant que l'économie.

2.6 Dynamiques d'investissement dans le secteur pétrolier

Les décisions d'investissement dans le secteur pétrolier obéissent à des dynamiques complexes, qui dépassent largement la simple lecture des indicateurs de rentabilité économique. Elles s'inscrivent dans un environnement caractérisé par la coexistence de facteurs économiques, techniques, institutionnels et géopolitiques, dont les interactions déterminent la temporalité et l'ampleur des engagements financiers (Dixit et Pindyck, 1994).

Historiquement, l'investissement pétrolier présente un caractère procyclique : les périodes de prix élevés du pétrole, souvent associées à une forte demande mondiale et à des anticipations de croissance soutenue, se traduisent par une augmentation significative des dépenses d'exploration et de développement (Hamilton, 2009). À l'inverse, les épisodes de baisse marquée des prix ou de ralentissement économique entraînent des reports, voire des annulations de projets (Kellogg, 2014). Toutefois, cette cyclicité apparente masque une asymétrie importante : les entreprises pétrolières réagissent plus rapidement pour réduire ou suspendre leurs investissements en période de crise qu'elles ne le font pour relancer les projets lorsque les conditions s'améliorent (Anderson, Kellogg et Salant, 2018). Cette inertie haussière s'explique par la nature fortement irréversible des dépenses engagées et par la valeur stratégique de l'option d'attendre lorsque l'incertitude demeure élevée (McDonald et Siegel, 1986).

Au niveau microéconomique, cette dynamique se traduit par des comportements différenciés selon le type d'actifs. La production issue de puits existants reste relativement stable à court terme, les coûts marginaux de maintien étant faibles. En revanche, le forage de nouveaux puits et le développement de gisements inexploités sont beaucoup plus sensibles aux signaux de prix et aux anticipations de marché (Paddock et al. 1988). Ainsi, les ajustements de l'investissement se concentrent principalement sur les projets nouveaux, dont la décision peut être retardée ou séquencée pour limiter l'exposition aux risques.

Les facteurs non économiques, et en particulier le risque géopolitique, jouent un rôle déterminant dans ces arbitrages. La concentration des réserves pétrolières dans des zones à instabilité chronique telles que certaines régions du Moyen-Orient, de l'Afrique ou de l'Amérique latine expose les projets à des menaces spécifiques : conflits armés, nationalisations, sanctions économiques, ruptures contractuelles (Bekaert et al. 2005). Ces risques, souvent soudains et difficilement prévisibles, influencent directement le calendrier d'investissement et incitent à privilégier des projets plus courts, modulaires ou localisés dans des environnements institutionnels plus stables (Caldara et Iacoviello, 2019).

Par ailleurs, l'évolution récente des stratégies des compagnies pétrolières montre un renforcement de la discipline capitaliste et de la sélectivité des projets. L'objectif n'est plus uniquement d'accroître les volumes produits, mais d'optimiser le portefeuille d'actifs en maximisant le rendement ajusté au risque (IEA, 2023). Dans cette optique, la flexibilité décisionnelle sous forme d'options de report, de réduction ou d'abandon – devient un instrument central de gestion (Trigeorgis, 1995).

Enfin, l'intégration croissante de paramètres extra-économiques, tels que les contraintes environnementales, les exigences de transition énergétique ou la pression des investisseurs institutionnels en faveur d'une allocation plus durable du capital, modifie les trajectoires d'investissement (World Bank, 2022). Les entreprises doivent désormais arbitrer entre projets pétroliers traditionnels et investissements dans des segments émergents gaz naturel liquéfié, énergies renouvelables, captage et stockage du carbone ce qui renforce la nécessité d'une approche flexible et adaptative.

Ainsi, les dynamiques d'investissement dans le secteur pétrolier résultent d'un équilibre mouvant entre opportunités économiques, gestion de l'incertitude et adaptation aux contraintes externes. La compréhension fine de ces dynamiques est essentielle pour intégrer de manière réaliste le risque géopolitique dans la valorisation des projets, et pour éclairer les décisions d'attente, de lancement ou d'ajustement stratégique.

3 Modélisation du risque géopolitique du risque géopolitique

Dans cette section nous allons justifier la nécessité de recourir à un modèle déterministe du risque $R(t)$, ensuite nous proposerons un modèle de convergence déterministe du risque $R(t)$ avec forçage exogène que nous allons intégrer dans la valeur déterministe de l'option d'attendre afin d'étudier sa sensibilité

3.1 Justification du recours à un modèle de convergence déterministe avec forçage exogène

Dans le présent mémoire, le terme « modèle de convergence déterministe avec forçage exogène » est retenu pour qualifier l'équation différentielle linéaire du premier ordre utilisée afin de modéliser l'évolution du risque géopolitique. Cette terminologie souligne à la fois la rigueur mathématique du cadre analytique (équation de convergence) exprimant l'idée d'une dynamique évoluant vers un équilibre ; l'ancrage financier, le « forçage exogène » désignant les chocs ou tendances externes tels que les tensions internationales, les interventions internationales qui influencent directement la trajectoire du risque ; l'utilité stratégique du modèle, qui permet de suivre et d'anticiper l'évolution d'un indicateur clé dans la détermination du timing optimal des décisions d'investissement dans le cadre des options réelles.

Dans la littérature financière consacrée à l'évaluation des investissements en contexte incertain, les modèles s'appuient majoritairement sur une représentation stochastique des variables aléatoires. Ce choix est pertinent pour traiter des incertitudes économiques continues, telles que la volatilité des prix du pétrole ou les fluctuations de la demande, puisqu'il permet de simuler un large éventail de trajectoires possibles à partir de lois de probabilité connues.

Toutefois, l'application de ces méthodes au risque géopolitique révèle rapidement leurs limites. En effet, les événements géopolitiques conflits armés, sanctions économiques, changements de régime, ruptures contractuelles se distinguent par leur caractère exogène, brusque et irrégulier. Ils ne suivent ni des dynamiques régulières, ni des distributions statistiques stables. Leur intensité et leur durée sont variables, et leurs effets difficilement quantifiables.

De ce fait, les approches probabilistes traditionnelles, qu'il s'agisse du mouvement brownien géométrique ou des chaînes de Markov, peinent à reproduire les ruptures soudaines, les effets d'escalade ou les impacts non linéaires caractéristiques des crises

politiques. L'absence de séries chronologiques longues et fiables accentue encore la difficulté d'estimer les paramètres nécessaires à ces modèles stochastiques.

Face à ces contraintes, le choix d'une modélisation déterministe se justifie pleinement. En recourant à une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, ce mémoire représente le risque géopolitique non pas comme une variable aléatoire au comportement erratique, mais comme une grandeur dynamique dont l'évolution suit une trajectoire explicitement définie dans le temps. Cette approche permet d'intégrer directement les effets des chocs exogènes et de structurer la dynamique du risque autour de variables explicatives ou de tendances mesurables, offrant ainsi un cadre opérationnel et interprétable pour l'évaluation stratégique des investissements.

3.2 Modélisation

L'objectif de cette section est de formaliser la dynamique du risque géopolitique sous une forme mathématique adaptée à son intégration dans le modèle de valorisation de l'option d'attendre. Contrairement aux variables économiques classiques modélisées de manière stochastique, le risque géopolitique est ici représenté à l'aide d'une loi de mouvement avec forçage exogène. Ce modèle de convergence déterministe avec forçage exogène permet de simuler diverses trajectoires du risque (stabilisation, escalade, décroissance) et d'en analyser l'impact sur les seuils critiques d'investissement, la prime de risque ou la probabilité de réussite d'un projet. Cette approche permet donc de capturer l'évolution temporelle du niveau de risque de manière continue et déterministe, en cohérence avec les hypothèses retenues dans ce mémoire.

Considérons une variable notée $R(t)$, représentant le niveau du risque géopolitique à l'instant t . L'évolution de cette variable peut être modélisée par le modèle de convergence déterministe avec forçage exogène suivant:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot T(t) - \beta \cdot R(t) - \mu_0 \cdot R(t) \cdot E(t) + \pi \cdot I(t) : (F_1)$$

Ou encore : $\frac{dR(t)}{dt} + [\beta + \mu_0 \cdot E(t)]R(t) = \alpha \cdot T(t) + \pi \cdot I(t)$

(F₁) peut se mettre sous la forme

$$\frac{dR(t)}{dt} + A \cdot R(t) = f(t) : (F_2)$$

Avec $A = \beta + \mu_0 \cdot E(t)$ et $f(t) = \alpha \cdot T(t) + \pi \cdot I(t)$.

La variable $R(t)$ désigne le niveau de risque géopolitique à un instant t , évoluant sous l'influence de deux composantes : un terme de dissipation A et un flux d'alimentation $f(t)$.

Le paramètre $A = \beta + \mu_0 E(t)$, avec $\beta > 0$ et $\mu_0 > 0$, traduit la vitesse de résorption du risque, soit la rapidité avec laquelle les tensions géopolitiques diminuent en l'absence de nouveaux chocs. Ici, $E(t)$ représente le niveau d'incertitude économique ou d'événements

économiques influençant le risque à l'instant t . Le flux d'alimentation $f(t) = \alpha T(t) + \pi I(t)$ regroupe deux sources : $T(t)$, correspondant aux tensions politiques ou événements géopolitiques, et $I(t)$, décrivant les interventions internationales (diplomatiques, militaires ou économiques). Le coefficient $\alpha (> 0)$ mesure l'impact des tensions sur l'augmentation du risque, tandis que $\pi (> 0)$ reflète l'effet des interventions sur sa réduction.

Dans ce modèle, $\alpha T(t)$ accroît le risque proportionnellement aux tensions observées, $\beta R(t)$ traduit la dissipation naturelle du risque, $\mu_0 R(t) E(t)$ illustre l'amplification non linéaire du risque par l'incertitude économique, et $\pi I(t)$ modélise l'effet stabilisateur des interventions internationales.

La solution analytique de l'équation (F1), développée à l'annexe F, s'exprime sous la forme

$$R(t) = R(t) = [R_0 + K(t)] \cdot e^{-(\beta + \mu_0 E_0)t} : (F_3) \quad \text{ou encore } R(t) = [R_0 + K(t)] e^{-At} : (F_4)$$

$E(t)$ est constant ($E(t) = E_0$), R_0 désigne le risque initial et $K(t)$ un terme correctif intégrant l'effet combiné des interventions et tensions, calculé selon l'expression (F5) qui modélise la dynamique logistique des tensions $T(t)$ et la décroissance exponentielle des interventions $I(t)$. Les paramètres T_{\max} , γ et t_0 régissent l'évolution temporelle des tensions, tandis que I_0 , λ et τ caractérisent l'intensité et la durée des interventions. Le moment optimal T_0 d'investissement, défini comme l'instant où $R(t)$ est minimal et où l'asymétrie d'information est réduite, satisfait la relation

$$\alpha T(T_0) + \pi I(T_0) = (\beta + \mu_0 E_0) R(T_0), \text{ avec la condition } \alpha T'(T_0) > |\pi I'(T_0)| : (F6)$$

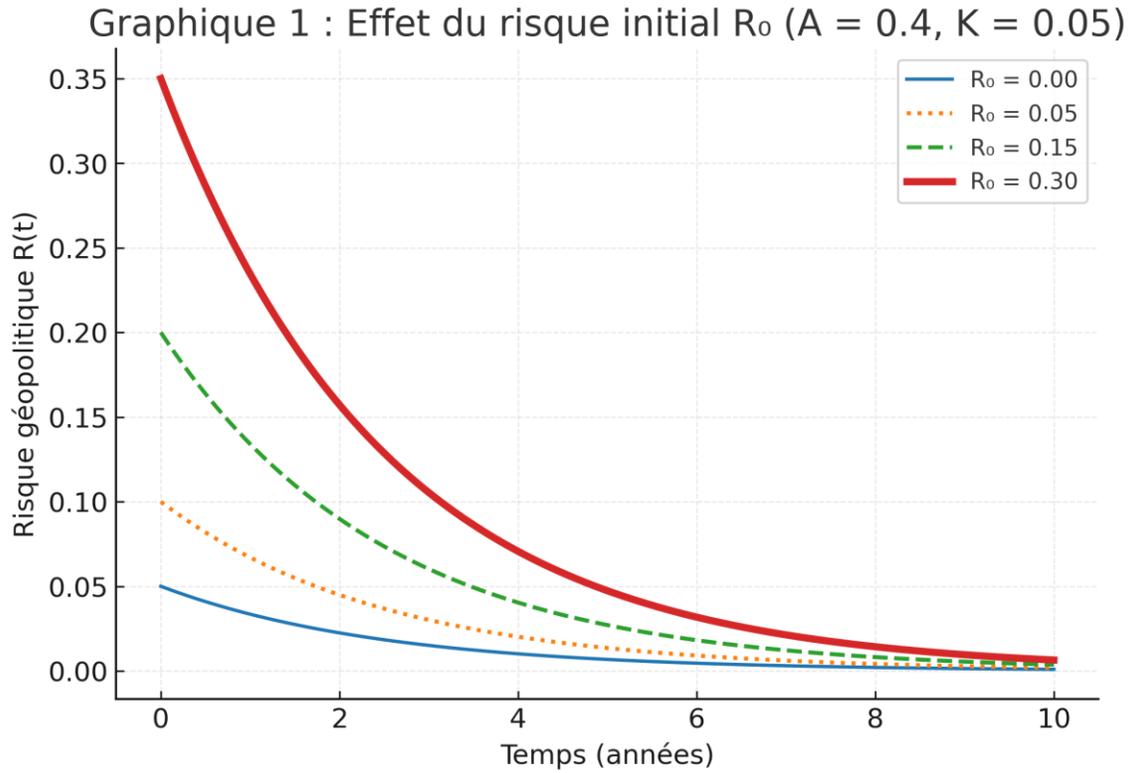
. Cette équation reflète un équilibre dans lequel les facteurs d'augmentation du risque sont exactement compensés par les effets de dissipation. Pour des paramètres appropriés, elle garantit l'existence d'un minimum local de $R(t)$, offrant ainsi une fenêtre optimale pour la décision d'investissement.

Ce modèle présente l'avantage de pouvoir représenter différentes configurations dynamiques : dissipation rapide du risque (A élevé), stabilisation lente (A faible) ou intensification continue ($f(t)$ élevé). Sa formulation analytique permet une intégration directe dans les équations de valorisation de l'option d'attendre, rendant possible l'évaluation précise de l'impact temporel et structurel du risque géopolitique sur la rentabilité d'un projet.

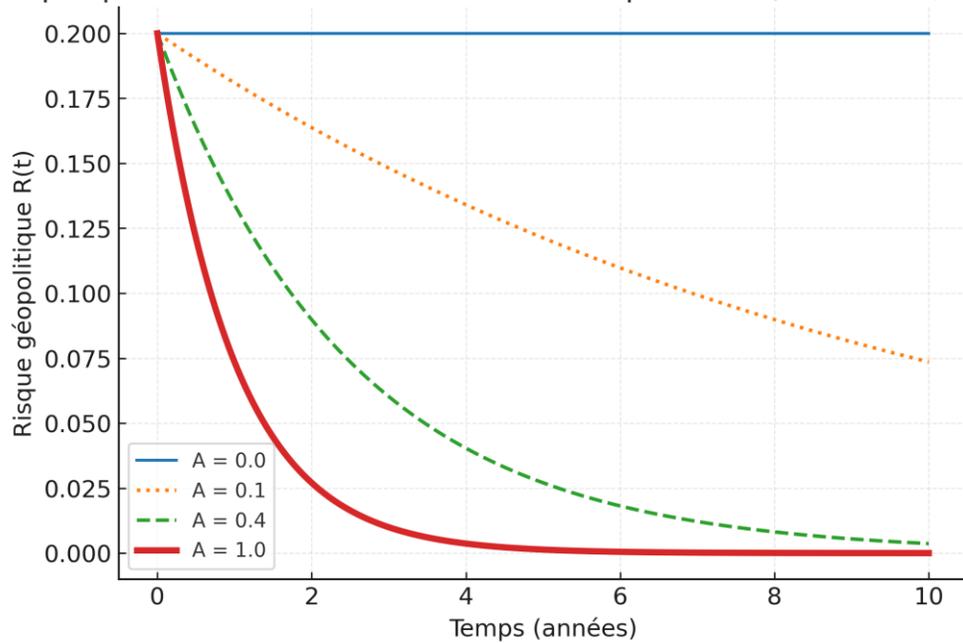
Les simulations effectuées à travers les graphiques 1, graphique 2 et graphique 3 montrent le comportement (sur une période de 10 ans ; 0-10ans) du niveau de risque $R(t)$ en fonction de la valeur du risque initial R_0 , de la vitesse de dissipation A ainsi que de l'intensité des chocs exogènes. Aussi en attribuant des valeurs aux paramètres contenus dans le modèle donnant $K(t)$ et aux paramètres R_0 et A nous avons pu stimuler un graphique 4 traduisant l'évolution de $R(t)$ sur une période de quinze ans. Sur ce graphique nous identifions clairement un moment optimal T_0 , à partir de l'interaction

entre tensions, interventions et mécanismes de dissipation.

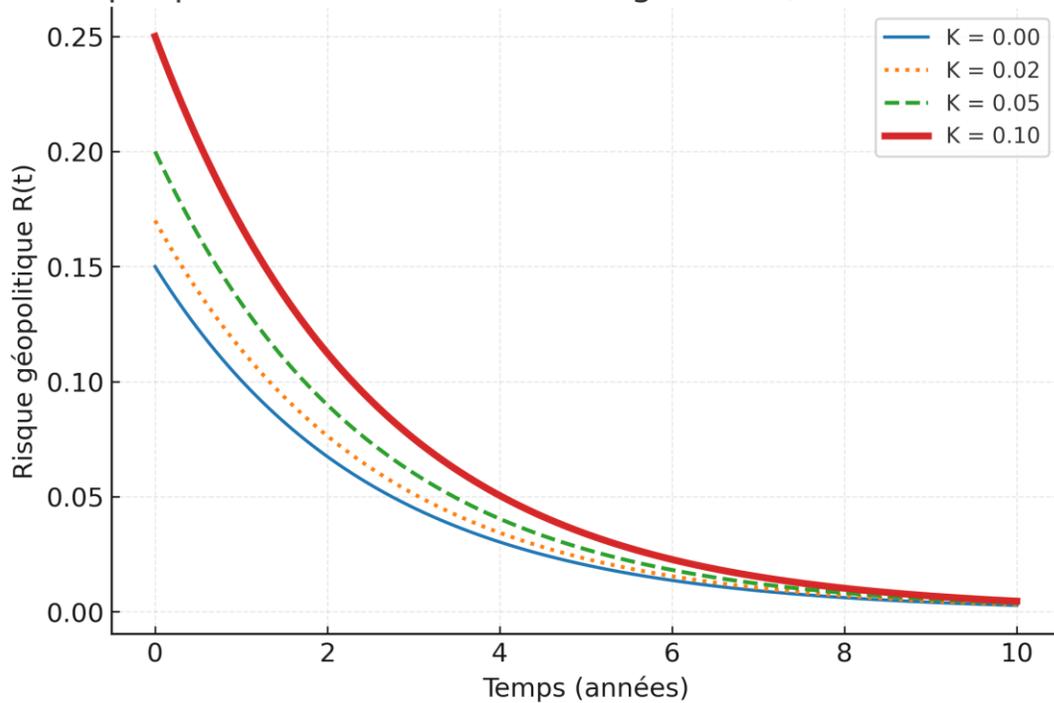
Graphique 1 : Effet du risque initial R_0 ($A = 0,4$; $K = 0,05$) sur l'évolution de $R(t)$



Graphique 2 : Effet de la vitesse de dissipation A ($R_0 = 0.15$, $K = 0.05$)



Graphique 3 : Effet des chocs exogènes K ($R_0 = 0.15$, $A = 0.4$)

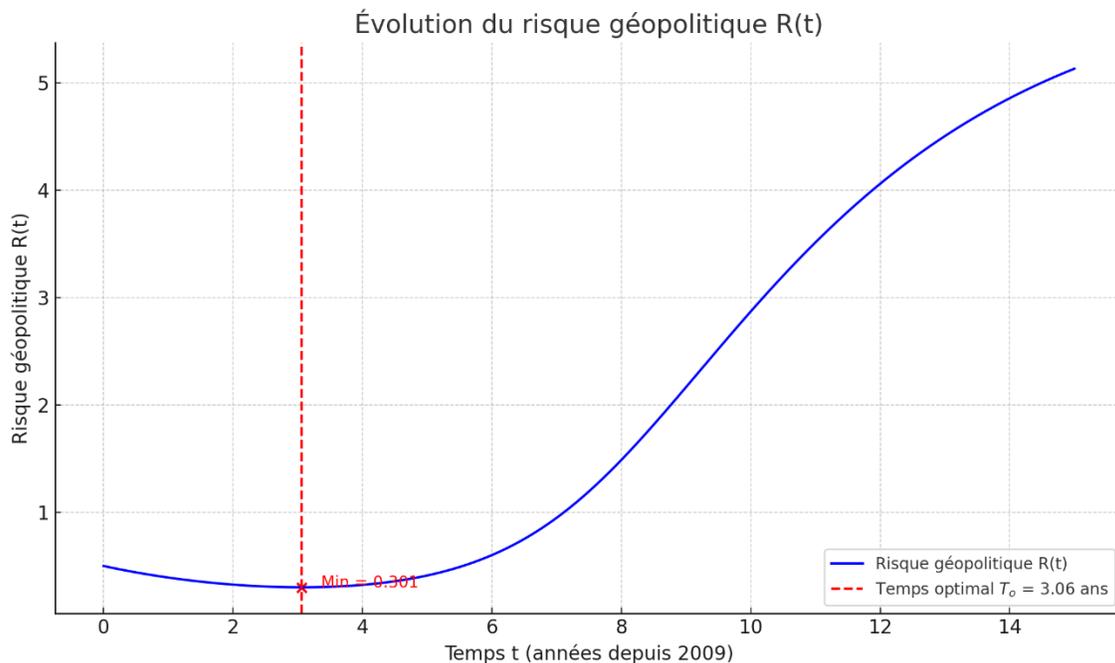


Les simulations présentées par ces trois graphiques (1, 2, 3) mettent en évidence l'impact du risque géopolitique et de ses paramètres sur la valeur dynamique de $R(t)$ au cours du temps :

- Lorsque le risque initial R_0 est nul ou très faible, la courbe de $R(t)$ démarre bas et se dissipe rapidement, ce qui maximise la valeur potentielle de l'option d'attendre;
- Une augmentation progressive de R_0 diminue la valeur de l'option, les courbes se maintenant plus élevées sur la période considérée;
- Une vitesse de dissipation A plus forte réduit significativement l'intensité du risque au fil des années, accélérant ainsi la convergence vers un niveau de risque quasi nul;
- Enfin, l'intensité des chocs exogènes K accentue le niveau global du risque. Plus K est élevé, plus les courbes demeurent élevées et ralentissent la dissipation du risque..

Ces résultats illustrent l'importance de prendre en compte à la fois le niveau initial du risque, sa dynamique de dissipation et les chocs extérieurs dans l'évaluation des options réelles d'investissement.

Graphique 4 : Évolution du risque en fonction du temps



Le moment optimal T_0 où le risque est minimal est atteint à $t = 3.06$ ans (environ 2012).

La valeur minimale du risque est de $R(t) \approx 0.301$.

Unité de temps : t est exprimé en années depuis 2009 ($t = 0$ correspond à l'année 2009).

En effet la simulation de $R(t)$ constitue un pont entre la modélisation mathématique du risque et l'analyse stratégique des décisions d'investissement. Elle permet d'évaluer, de

comparer et de visualiser l'impact du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre, dans une logique de gestion proactive de l'incertitude dans les projets pétroliers. Enfin, cette modélisation peut être calibrée à partir de données empiriques (par exemple indice GPR de Caldara et Iacoviello), et constitue un cadre rigoureux pour analyser l'impact du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre, dans les investissements pétroliers sous incertitude.

3.3 Intégration dans la valeur déterministe de l'option d'attendre

Cette section vise à montrer comment le risque géopolitique, représenté par la fonction dynamique $R(t)$, peut être intégré dans une formule déterministe de la valeur de l'option d'attendre

3.3.1 Adaptation de la formule de valorisation en fonction du niveau de risque

Dans le cadre théorique des options réelles, la valeur de l'option d'attendre représente la flexibilité stratégique dont dispose un investisseur pour différer un projet d'investissement irréversible, afin de disposer de nouvelles informations ou de réduire son exposition à l'incertitude, notamment celle liée au contexte géopolitique. Cette flexibilité présente une valeur intrinsèque, car elle permet d'améliorer la qualité de la décision grâce à une meilleure information et d'éviter des investissements non rentables en période d'instabilité. Dans un environnement caractérisé par une forte volatilité ou un risque accru, l'option d'attendre devient plus attrayante, conformément à la logique des options réelles. Les modèles classiques de tarification d'options, tels que Black-Scholes, les arbres binomiaux ou les simulations de Monte Carlo, peuvent être adaptés afin d'intégrer les effets de la volatilité, y compris celle induite par le risque géopolitique, la durée restante avant l'expiration de l'option ainsi que le taux d'actualisation ajusté au risque. Dans le modèle de Chorn et Shokhor (2006), la valeur de l'option d'attendre dépend de variables économiques clés (prix du pétrole, coûts d'exploitation, rendements anticipés) actualisées à un taux r incluant déjà une prime de risque.

La formule déterministe de la valeur de l'option d'attendre $V(t, R(t))$ enrichie par le niveau du risque géopolitique $R(t)$ s'écrit :

$$V(t, R(t)) = \max[e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t)) | s, a\} - (e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t)), 0] : (H'3)$$

Les expressions suivantes permettent d'explicitier cette formule de $V(t, R(t))$.

$V(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t)) = \max \{S(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t)) - X(t + \Delta t, s'), \beta \cdot E\{V(t + 2\Delta t, s'', R(t + 2\Delta t)) | s', a'\} \} : (H'5)$
désigne la valeur de l'investissement à l'instant $(t + \Delta t)$ lorsque le projet est dans l'état s' et influencé par le risque $R(t)$;

$$E \{V(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t)) | s, a\} = \int_{s'} V(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t)) \cdot P(s' | s, R(t + \Delta t)) ds' : (H'6)$$

Ces différentes formules ont été établies en annexe (H').

$P(s'/s, R(t)) = \frac{1}{\sigma' \sigma \sqrt{2\pi} \Delta t} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s'}{s}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta t]^2}{2\sigma^2 \Delta t}\right)$: (H22) (en Annexe H) désigne la probabilité conditionnelle de transition du projet de l'état s à l'état s' et influencée par le risque géopolitique $R(t)$.

L'espérance $E\{V(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t)) | s, a\}$ est calculée sous densité log-normale (confère annexe H) de l'état s' du projet à l'instant $(t + \Delta t)$ et où la valeur de continuation $V(t + \Delta t, s', R(t + \Delta t))$ suit l'arbre décisionnel (investir tout de suite, ou attendre une période supplémentaire). Cette écriture fait clairement apparaître l'effet dual de $R(t)$: plus $R(t)$ est élevé, plus l'actualisation est forte et le flux $S(t)$ est réduit, ce qui tend à déprimer la valeur actualisée des gains futurs.

La dynamique du risque étudiée suit les deux formes retenues sont

$$R(t) = [R_0 + K(t)] \cdot e^{-(\beta + \mu_0 E_0)t} : (F_3) \text{ ou à des fins de simulation}$$

$$R(t) = [R_0 + K(t)] e^{-At} : (F_4)$$

où $A > 0$ représente la vitesse de dissipation du risque; $K(t)$ agrège l'effet des tensions $T(t)$ (logistique) et des interventions $I(t)$ (décroissance exponentielle), et β, μ_0, E_0 gouvernent la dissipation structurelle. Le moment optimal T_0 s'obtient lorsque $R(t)$ est minimal, sous la condition de premier ordre indiquée dans le fichier..

L'intégration de $R(t)$ influence la décision d'investissement par plusieurs canaux. D'abord, via le taux d'actualisation : un niveau élevé de $R(t)$ accroît la prime de risque, donc le taux d'actualisation $(r + R(t))$, ce qui réduit la valeur actualisée des flux futurs et, par conséquent, la valeur de l'option d'attendre. Ensuite via la réduction du flux $S(t)$ par le risque qui agit sur la probabilité de transition conditionnelle $P(s'/s, R(t))$: un risque accru diminue la probabilité de passer d'un état d'attente à un état d'engagement, tout en augmentant celle d'un désengagement ou d'un abandon, ce qui retarde les transitions vers des états irréversibles et élève le seuil de rentabilité requis. Enfin, via la stratégie d'exercice :

Cette formulation permet de simuler divers scénarios : risque persistant, décline rapide, ou pic temporaire, de cartographier les bifurcations stratégiques entre attente, investissement et abandon, et de mesurer l'impact combiné de la volatilité des marchés et de l'instabilité géopolitique. La valeur de l'option d'attendre ne dépend ainsi pas uniquement des paramètres économiques traditionnels, mais aussi du contexte géopolitique global. L'approche proposée dépasse les modèles statiques et constitue un outil plus pertinent pour guider les décisions d'investissement dans des environnements incertains et instables, caractéristiques des projets pétroliers.

3.3.2 Simulations : Comportement de l'option d'attendre selon le niveau de risque et la vitesse de dissipation A

Dans cette section, nous analysons le comportement de la valeur de l'option d'attendre en fonction du niveau du risque géopolitique $R(t)$ et de la vitesse de sa dissipation A . Le risque est modélisé par la relation :

$$R(t) = [R_0 + K(t)]e^{-At} \quad : (F_4)$$

où R_0 représente le risque initial, A la vitesse de dissipation du risque, et $K(t)$ les chocs exogènes dus aux tensions $T(t)$ (logistique) et des interventions internationales $I(t)$ (décroissance exponentielle). Les simulations considèrent différents niveaux de risque (R_0), diverses vitesses de dissipation A ($A > 0$) gouvernées par β, μ_0, E_0 et des intensités de chocs exogènes (K)

La valeur de l'option d'attendre est modélisée par la formule :

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E\{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} - (e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t)), 0] \quad : (H'_3)$$

Les simulations portent sur plusieurs scénarios :

- $R(t) = 0$ (absence de risque)
- $R(t) = R_0$ (risque initial)
- Risque faible ($R_0 = 0.05$)
- Risque moyen ($R_0 = 0.15$)
- Risque élevé ($R_0 = 0.30$)
- $R(t) = R_c$ (seuil critique où la valeur de l'option est maximale)

La vitesse de dissipation du risque est également variée :

- $A = 0$ (risque persistant)
- $A = 0.1$ (dissipation faible)
- $A = 0.4$ (dissipation moyenne)
- $A = 1.0$ (dissipation forte)

Les chocs exogènes sont également variés :

- $K=0$ (absence de chocs exogènes)
- $K=0,1$ (choc exogène faible)
- $K=0,4$ (choc exogène moyen)
- $K=1$ (choc exogène élevé)

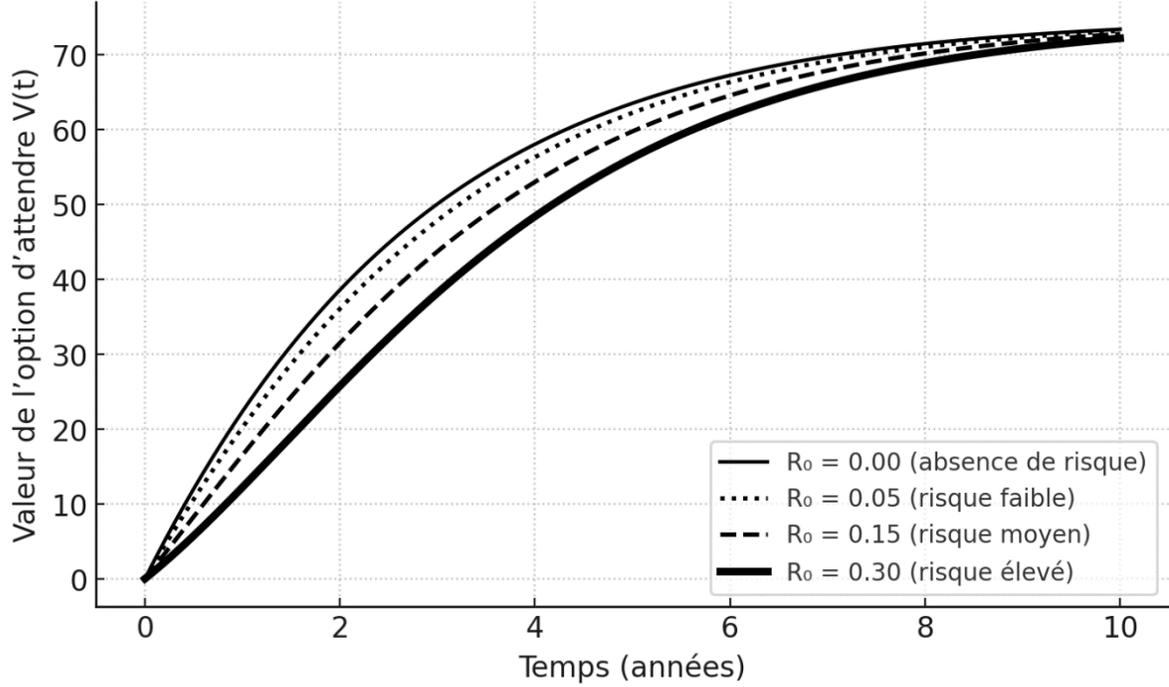
• Graphiques simulées

Les graphiques ci-dessous ont été représentés à partir de la formule

$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E\{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} - (e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t)), 0] \quad : (H'_3)$ en tenant compte du fait que la formule du risque géopolitique est donnée par la formule

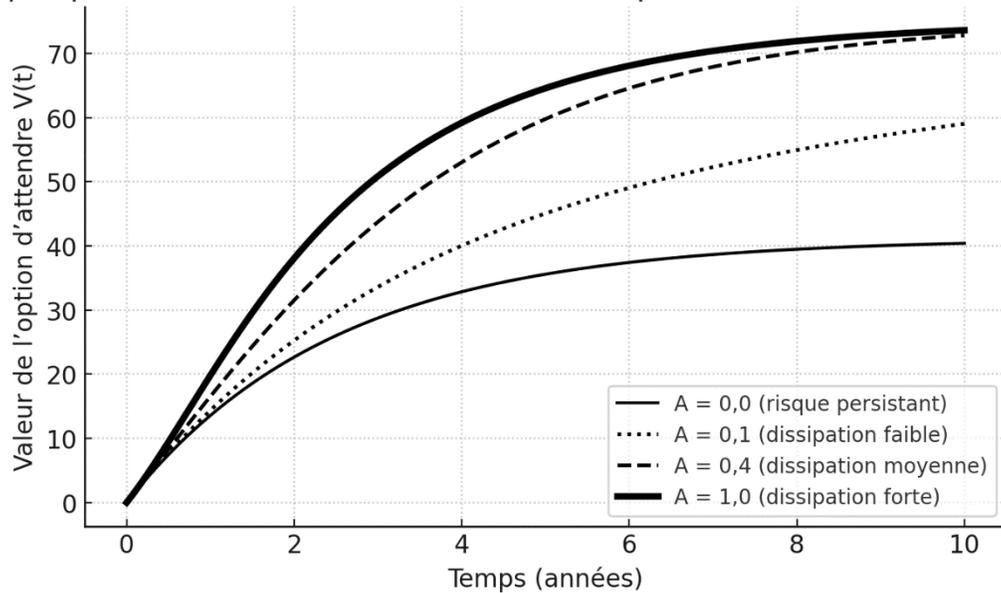
$$R(t) = [R_0 + K(t)]e^{-At}$$

Graphique 5 — Effet du risque initial R_0 ($A = 0,4$; $K = 0,05$)



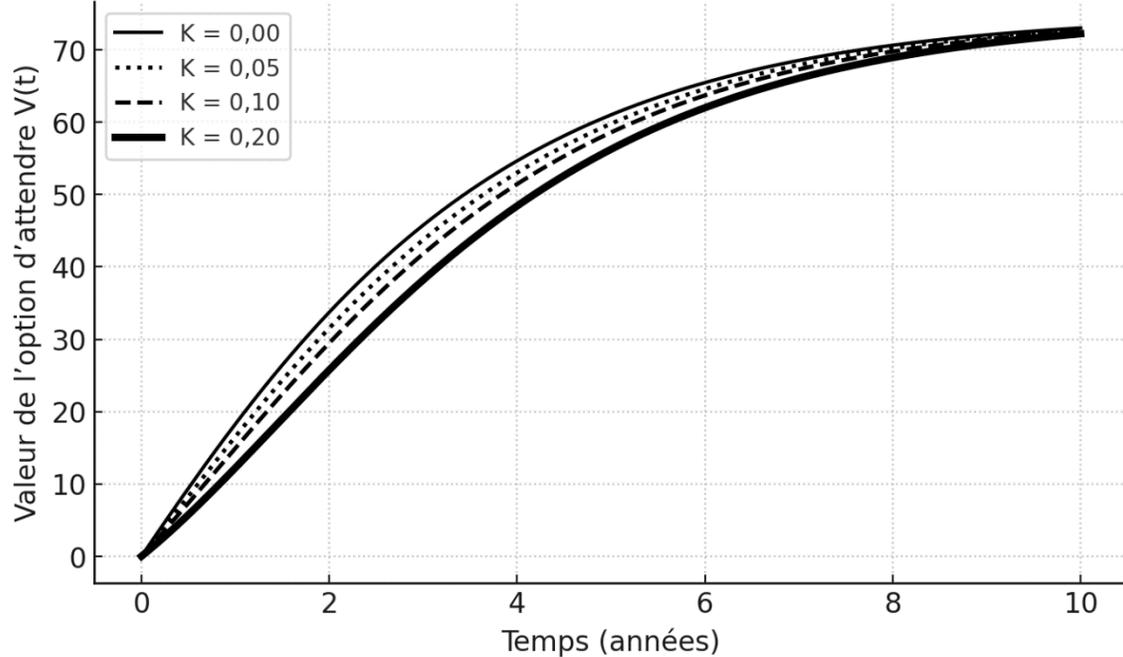
Graphique 5 — Effet du risque initial R_0 ($A = 0,4$; $K = 0,05$)

Graphique 6 — Effet de la vitesse de dissipation A ($R_0 = 0,15$; $K = 0,05$)



Graphique 6 — Effet de la vitesse de dissipation A ($R_0 = 0,15$; $K = 0,05$)

Graphique 7 — Effet des chocs exogènes K ($R_0 = 0,15$; $A = 0,4$)



Graphique 7 — Effet des chocs exogènes K ($R_0 = 0,15$; $A = 0,4$)

• Paramètres simulés et valeurs maximales

Le tableau 1 ci-dessous présente les différentes combinaisons de paramètres (R_0 , A , K) utilisées dans les simulations de la sous-section 3.3.2, ainsi que les valeurs maximales obtenues pour l'option d'attendre (V_{max}) et le temps optimal (T_0).

Tableau 1 : Paramètres simulés valeurs maximales de $V(t, R(t))$ et temps optimal T_0

R_0	A	K	Valeur maximale	Temps optimal
0.0	0.0	0.0	73.618	10.0
0.0	0.0	0.05	25.559	10.0
0.0	0.0	0.1	20.0	0.0
0.0	0.1	0.0	73.618	10.0
0.0	0.1	0.05	53.097	10.0
0.0	0.1	0.1	36.023	10.0
0.0	0.4	0.0	73.618	10.0
0.0	0.4	0.05	72.504	10.0

0.0	0.4	0.1	71.401	10.0
0.0	1.0	0.0	73.618	10.0
0.0	1.0	0.05	73.615	10.0
0.0	1.0	0.1	73.612	10.0
0.05	0.0	0.0	25.559	10.0
0.05	0.0	0.05	20.0	0.0
0.05	0.0	0.1	20.0	0.0
0.05	0.1	0.0	53.097	10.0
0.05	0.1	0.05	36.023	10.0
0.05	0.1	0.1	21.818	10.0
0.05	0.4	0.0	72.504	10.0
0.05	0.4	0.05	71.401	10.0
0.05	0.4	0.1	70.308	10.0
0.05	1.0	0.0	73.615	10.0
0.05	1.0	0.05	73.612	10.0
0.05	1.0	0.1	73.61	10.0
0.15	0.0	0.0	20.0	0.0
0.15	0.0	0.05	20.0	0.0
0.15	0.0	0.1	20.0	0.0
0.15	0.1	0.0	21.818	10.0
0.15	0.1	0.05	20.0	0.0
0.15	0.1	0.1	20.0	0.0
0.15	0.4	0.0	70.308	10.0
0.15	0.4	0.05	69.225	10.0
0.15	0.4	0.1	68.151	10.0
0.15	1.0	0.0	73.61	10.0
0.15	1.0	0.05	73.607	10.0
0.15	1.0	0.1	73.604	10.0
0.3	0.0	0.0	20.0	0.0

0.3	0.0	0.05	20.0	0.0
0.3	0.0	0.1	20.0	0.0
0.3	0.1	0.0	20.0	0.0
0.3	0.1	0.05	20.0	0.0
0.3	0.1	0.1	20.0	0.0
0.3	0.4	0.0	67.088	10.0
0.3	0.4	0.05	66.034	10.0
0.3	0.4	0.1	64.989	10.0
0.3	1.0	0.0	73.601	10.0
0.3	1.0	0.05	73.598	10.0
0.3	1.0	0.1	73.596	10.0

Ces résultats montrent que la valeur maximale de l'option d'attendre (V_{max}) et le temps optimal (T_0) dépendent fortement des paramètres de risque initial R_0 , de la vitesse de dissipation A et de l'intensité des chocs K .

- **Résultats et interprétation des simulations**

Le tableau2 suivant présente une synthèse des résultats observés et des interprétations associées, selon les différents scénarios de risque et de dissipation.

Tableau 2 : Synthèse des résultats et interprétation des simulations

Paramètres (R_0 , A , K)	Résultat de la simulation ($V(t)$)	Interprétation et commentaires
$R=0$ (absence de risque)	Valeur maximale de l'option	Scénario idéal : l'attente est pleinement rentable.
Risque faible ($R_0 \approx 0.05$)	Valeur significative mais inférieure au cas sans risque	L'option demeure attractive mais pénalisée par l'introduction d'un risque limité.
Risque moyen ($R_0 \approx 0.15$)	Apparition d'un seuil critique R_c , valeur maximale transitoire avant décroissance	Zone de flexibilité conditionnelle : l'option est viable jusqu'au franchissement de R_c , après quoi sa valeur chute.
Risque élevé ($R_0 \approx 0.30$)	Valeur proche de zéro	Attente inutile : l'instabilité annihile la valeur stratégique.

Dissipation rapide (A élevé)	Préservation partielle de la valeur	L'effet amortisseur d'une forte dissipation atténue les pertes de valeur de l'option.
Dissipation lente (A faible)	Valeur fortement réduite	La persistance du risque accentue la décroissance de la valeur de l'option.
Chocs exogènes faibles (K faible)	Valeur plus stable	Les pertes de valeur sont limitées, surtout si la dissipation est rapide.
Chocs exogènes intenses (K élevé)	Amplification des pertes	Les chocs aggravent la vulnérabilité, en particulier quand A est faible.

- **Synthèse des résultats de simulation : Effet du risque géopolitique**

La valeur de l'option d'attendre décroît globalement avec l'intensité du risque géopolitique $R(t)$. Comparé au scénario sans risque, l'introduction du risque réduit significativement la valeur stratégique de l'attente.

i) Rôle de la vitesse de dissipation (A)

Une dissipation rapide du risque agit comme un facteur d'amortissement : plus A est élevé, plus vite le risque s'estompe. Cette dynamique permet de préserver une partie de la valeur de l'option, même après le franchissement du seuil critique R_c . Lorsque A est élevé, la perte de valeur est atténuée ; à l'inverse, une faible vitesse de dissipation accentue la décroissance.

ii) Impact des chocs exogènes (K)

Les chocs exogènes amplifient les pertes de valeur, surtout lorsque la dissipation est lente (A faible). Une intensité réduite de ces chocs permet de limiter l'érosion de la valeur stratégique.

iii) Conjecture générale

La valeur de l'option d'attendre est une fonction décroissante du risque $R(t)$. Toutefois, la combinaison d'une dissipation rapide du risque et d'une faible intensité des chocs exogènes peut compenser partiellement l'effet négatif du risque géopolitique et préserver la valeur de l'attente.

3.4 Étude de sensibilité

L'objectif de cette section est d'examiner comment les variations du risque géopolitique, modélisé par la fonction dynamique $R(t)$, influencent la valeur de l'option d'attendre, ainsi que d'explorer les interactions de ce risque avec d'autres dimensions critiques de l'incertitude, notamment la volatilité des variables économiques et l'asymétrie d'information.

3.4.1 Effets des variations de R(t) sur la valeur d'attendre

L'analyse de sensibilité consiste à évaluer dans quelle mesure la valeur de l'option d'attendre est affectée par des changements dans les paramètres clés, en particulier le risque géopolitique R(t).

Dans notre modèle, le risque suit la dynamique :

$$R(t) = R_0 + K(t) \cdot e^{-(\beta + \mu_0 E_0)t} : (F_3) \text{ ou à des fins de simulation}$$

$$R(t) = [R_0 + K(t)] e^{-At} : (F_4)$$

Dans cette formule R₀ désigne le niveau initial du risque; K(t) les chocs exogènes dus aux tensions géopolitiques et interventions internationales; et A la vitesse de dissipation du risque (faible, moyenne ou forte).

i) Résultats des simulations :

- R(t) est nul (absence de risque), la valeur de l'option d'attendre est Lorsque maximale car l'investisseur bénéficie pleinement de la flexibilité inter temporelle sans incertitude additionnelle.
- Pour des niveaux faibles de risque (R(t) bas), la valeur de l'option diminue légèrement mais reste attractive : le coût du risque est contrebalancé par la possibilité d'attendre une amélioration des conditions.
- Pour des niveaux moyens de risque, une zone critique apparaît : au-delà d'un seuil R_c, la valeur de l'option diminue brutalement, traduisant la perte de l'intérêt stratégique de l'attente.
- Pour des niveaux élevés de risque (R(t) fort), la valeur de l'option se rapproche de zéro : il devient optimal de ne pas différer l'investissement, car l'incertitude détruit la valeur de l'option d'attendre.

ii) Interprétation

Graphiquement, on observe un faisceau de courbes décroissantes représentant la valeur de l'option selon R(t). L'intégration du risque géopolitique dans le modèle réduit la valeur stratégique de l'attente, mais l'effet négatif peut être amorti si la dissipation du risque est rapide. Ainsi, la sensibilité de l'option dépend autant du niveau du risque initial que de sa dynamique d'évolution.

iii) Valeur maximale obtenue pour le seuil de risque critique

Le seuil critique R_c marque le point de bascule entre l'attrait de l'attente et la nécessité d'investir immédiatement ou de renoncer au projet Ce seuil critique du risque R_c est calculé implicitement par l'équation

$$\Delta X + S e^{r\Delta + R_c(1-\Delta)} = (\Delta + e^{-A\Delta}) S p e^{-R_c e^{-A\Delta}} \quad (H'_{21}) \text{ sous la condition}$$

$$(\Delta + e^{-A\Delta})^2 (e^{-[(r+Rc)\Delta + Rc e^{-A\Delta}]}) S_p < \Delta^2 X e^{-(r+Rc)\Delta} + e^{-(Rc)} S \quad (H'_{24}) \quad (\text{voir annexe H'})$$

La formule fermée du seuil de risque géopolitique obtenue pour une décision annuelle $\Delta=1$ est

$$R_c = e^A \ln \left(\frac{1 + e^{-A} S_p}{X + S e^r} \right) : (H'_{26}) \quad \text{sous condition } (1 + e^{-A})^2 (e^{-[(r+Rc) e^{-A}]}) S_p < X e^{-r} + S \quad (H'_{27})$$

Dans ce cas la Valeur maximale de l'option d'attendre en R_c (pour $\Delta=1$) est

$$V_{\max}(R) = X + e^{-(r+Rc)} \left[\frac{X + S e^r}{1 + e^{-A}} S_p - X \right] - S \cdot e^{-(Rc)} \quad (H'_2 \text{ (Annexe H}_{28})$$

iv) Comportement asymptotique de la valeur d'attendre

- **Lorsque Δt tend vers de très grandes valeurs (attente très longue)**

La valeur de l'option d'attendre $V(t, R(t))$ tend vers $\max[-e^{-(R(t))} S(t) + X(t), 0]$: (H'_{29})
Cela signifie qu'attendre indéfiniment conduit à une érosion complète de la valeur stratégique de l'option. En d'autres termes, un horizon d'attente trop long réduit la valeur de l'option d'attendre jusqu'à l'annuler.

- **Lorsque $R(t)$ est très élevé (instabilité géopolitique extrême)**

Il est totalement inutile d'attendre en présence d'un risque géopolitique extrême, car sa valeur tombe à zéro

Ces deux cas mettent en évidence que la valeur de l'option d'attendre n'est soutenue que dans un cadre temporel et géopolitique limité. Une attente trop longue ou un environnement politique excessivement instable aboutissent inévitablement à une destruction de la valeur de l'option. Ainsi, la pertinence stratégique de l'attente repose sur un compromis entre horizon temporel raisonnable et niveau de risque politique tolérable.

3.4.2 Effets croisés avec la volatilité et les asymétries d'information

Outre le risque géopolitique, d'autres facteurs financiers jouent un rôle déterminant : la volatilité des prix du pétrole et les asymétries d'information entre acteurs.

- **Interaction avec la volatilité (σ)**

En théorie des options réelles, une hausse de la volatilité accroît généralement la valeur de l'option, car elle élargit l'éventail des scénarios favorables futurs.

Toutefois, lorsque le risque géopolitique $R(t)$ est élevé, cet effet positif est neutralisé : la volatilité ne contribue plus à augmenter la valeur de l'option car l'incertitude politique domine les perspectives de prix.

Ainsi, il existe un effet non linéaire : à risque faible, une hausse de la volatilité augmente fortement la valeur de l'option ; à risque moyen, l'effet est atténué et enfin risque fort, l'effet est quasi nul.

- **Interaction avec l'asymétrie d'information**

L'asymétrie d'information entre firmes pétrolières, États et investisseurs accentue la perception du risque : les acteurs n'ont pas accès au même niveau de transparence quant aux interventions politiques ou aux tensions militaires. Lorsque l'asymétrie est forte, la valeur de l'option chute plus rapidement pour un même niveau de risque $R(t)$. Inversement, la réduction de l'asymétrie (via la veille stratégique, le partage d'informations, l'intelligence artificielle appliquée à l'analyse géopolitique) augmente la résilience de la valeur de l'option face aux chocs géopolitiques.

En synthèse

- Le risque géopolitique réduit la valeur de l'option d'attendre.
- La volatilité amplifie ou atténue cet effet selon le niveau de risque.
- Les asymétries d'information jouent un rôle aggravant : elles déplacent le seuil critique R_c vers des niveaux plus faibles.
- Ainsi, l'étude de sensibilité met en évidence l'importance de stratégies combinées de gestion du risque (atténuation géopolitique), de gestion de la volatilité (couvertures financières) et de réduction des asymétries d'information (veille, IA, coopération internationale)

4. Extension du modèle de Chorn et Shokhor (2006)

Dans cette section, nous allons rappeler le modèle de base qui est celui de Chorn et Shokhor (2006), puis nous intégrerons le risque géopolitique dans le processus de décision puis enfin nous parlerons des nouveaux chemins de décisionnels sous contrainte géopolitique

4.1 Rappel du modèle de base

Le modèle de Chorn et Shokhor (2006) prolonge les travaux de Dixit et Pindyck (1994) en appliquant la théorie des options réelles aux projets pétroliers à long terme. Il modélise les décisions séquentielles des entreprises dans un environnement incertain à l'aide d'un arbre décisionnel multi-phases représentant les étapes clés du projet : exploration, développement et production. Chaque nœud de cet arbre correspond à un choix stratégique investir, attendre ou abandonner déterminé par l'information disponible au moment de la décision. La dynamique du prix du pétrole, principal déterminant de la rentabilité, est modélisée par un processus stochastique, tel qu'un mouvement brownien géométrique ou une marche aléatoire avec dérive, afin d'évaluer les flux futurs en tenant compte de l'incertitude.

Le cadre repose sur la programmation dynamique, utilisant l'équation de Bellman pour identifier les seuils critiques d'investissement. Cette équation prend en compte la valeur immédiate du projet, les coûts résiduels, les revenus anticipés et la flexibilité stratégique que procure l'option d'attendre. Elle se présente sous la forme :

$$V(S(t), X(t), 0) = \max_{(S(t) - X(t))} \{ V(S(t), X(t), 0) + \max_{(S(t) - C(t))} [\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r)^{t_i}} E_{t_i} \{ V(S(t), X(t), t_i) | V(S(t), X(t), t_{i-1}) > 0 \}] \} : (G_1)$$

Dans sa formulation générale, elle permet de déterminer la valeur optimale d'un investissement initial, au temps $t = 0$, en intégrant la valeur immédiate et celle des options d'investissement futures. Les variables $S(t)$ et $X(t)$ représentent respectivement la valeur actuelle des revenus nets futurs attendus et la valeur actualisée des dépenses en capital liées à l'investissement immédiat. Le paramètre r reflète le taux d'actualisation, et n désigne le nombre de décisions majeures pouvant être prises sur la durée de vie de l'actif. L'espérance conditionnelle E_t traduit la prise en compte de l'information disponible au moment de la décision, tandis que la somme des valeurs actualisées des options futures permet d'évaluer leur contribution potentielle à la valeur totale du projet. Le terme $\max[\dots, 0]$ garantit que seule une valeur ajoutée non négative est retenue.

L'interprétation de cette équation distingue deux situations : si la somme actualisée des valeurs attendues des options futures est négative, la stratégie optimale consiste à ignorer ces options et à retenir uniquement la valeur immédiate de l'investissement. En revanche, si cette somme est positive, elle est intégrée à la décision, reflétant leur potentiel de création de valeur. La résolution de l'équation de Bellman s'effectue par une approche récursive : on part de la condition terminale au dernier instant T , où la valeur de l'investissement est donnée par $\max[S(T) - X(T), 0]$, puis on remonte dans le temps par itération rétrograde jusqu'à $t = 0$. Afin d'alléger la notation, la valeur actuelle de l'investissement $V(S(t), X(t), t)$ est représentée par $V_t(s)$, où s désigne l'état physique du projet à l'instant t . La forme simplifiée de l'équation exprime que $V_t(s)$ correspond au maximum entre trois valeurs : zéro (abandon), $S(t) - X(t)$ (investissement immédiat) et $\beta \times E[V(t+1, s') | s, a]$ (attente avec espérance actualisée de la meilleure décision future), où

β est le facteur d'actualisation et $E[V(t+1, s') | s, a]$ la valeur future espérée selon l'état futur s' et l'action a .

Cette formulation traduit la logique fondamentale de la théorie des options réelles : comparer la valeur nette potentielle d'un investissement immédiat à la valeur de l'option d'attendre, tout en intégrant l'incertitude, la flexibilité décisionnelle et l'opportunité stratégique que procure le report. La forme simplifiée $V = \max [(S - X)_t, 0] - C$, où C désigne le coût de création de l'option, illustre que l'entreprise retient la meilleure alternative entre agir immédiatement ou conserver la flexibilité d'attendre. Ce cadre constitue une base solide pour modéliser les investissements complexes du secteur pétrolier. Cependant, il présente une limite majeure : l'absence explicite de prise en compte du risque géopolitique, un facteur central dans les décisions d'investissement énergétique mondiales. Le présent chapitre vise précisément à combler cette lacune en proposant une extension du modèle initial, intégrant le risque géopolitique sous une forme dynamique et directement incorporé aux équations de décision.

4.2 Intégration du risque géopolitique dans le processus de décision

L'intégration du risque politique constitue une étape cruciale dans l'évaluation stratégique des investissements pétroliers. Les résultats des sections précédentes ont montré que la valeur de l'option d'attendre est fortement influencée par la dynamique du risque géopolitique $R(t)$, sa dissipation et son interaction avec d'autres sources

d'incertitude. Dans ce cadre, il devient essentiel d'articuler un processus décisionnel rigoureux qui prenne en compte ces dimensions.

4.2.1. Prise en compte du risque dans la valorisation des projets

L'intégration du risque politique dans la valorisation des projets pétroliers constitue une étape incontournable du processus décisionnel. Les résultats présentés dans les sections précédentes (3.3 et 3.4) ont mis en évidence que la valeur de l'option d'attendre est fortement sensible au niveau du risque géopolitique $R(t)$, à sa vitesse de dissipation A , ainsi qu'à l'ampleur des chocs exogènes $K(t)$. En pratique, cela signifie que la décision d'attente ou d'investissement immédiat ne peut plus reposer sur une simple analyse de la valeur actualisée nette (VAN), mais doit inclure une évaluation dynamique de l'impact du risque.

Lorsque le risque est nul ($R(t)=0$), la valeur de l'option d'attendre atteint son maximum, confirmant que, dans un environnement stable, l'attente procure aux investisseurs une flexibilité stratégique essentielle. Cependant, dès qu'un risque non nul apparaît, même faible, on observe une diminution de la valeur de l'option. Cette réduction est d'autant plus prononcée que le risque croît ou que sa dissipation est lente. Pour des niveaux intermédiaires de risque, un seuil critique R_c est atteint : en deçà, attendre reste rationnel car l'option conserve une valeur positive, tandis qu'au-delà, la valeur de l'option chute brutalement et l'attente devient contre-productive. Ce phénomène illustre la non-linéarité du lien entre risque politique et valeur stratégique de l'attente.

L'intégration du risque dans la valorisation des projets se traduit par l'actualisation des flux futurs à l'aide d'un taux ajusté, $(r+R(t))$. Ce dernier combine le coût du capital propre à l'entreprise avec une prime de risque reflétant l'incertitude politique. Plus $R(t)$ est élevé, plus le facteur d'actualisation diminue rapidement, ce qui réduit la valeur attendue des flux futurs et, par conséquent, celle de l'option d'attendre. La formule de valorisation présentée précédemment met ainsi en évidence que le risque géopolitique agit comme une « taxe implicite » sur le temps d'attente : il déprécie progressivement les avantages de la flexibilité et incite à privilégier une décision plus rapide ou un désengagement.

La vitesse de dissipation A constitue un paramètre déterminant dans cette logique. Un risque élevé mais rapidement dissipé conserve un impact limité sur la valeur de l'option, alors qu'un risque modéré mais persistant peut s'avérer beaucoup plus destructeur. Cela traduit la nécessité, pour les investisseurs, de ne pas se limiter à mesurer le niveau actuel du risque, mais de modéliser sa dynamique temporelle et sa trajectoire probable. De même, les chocs exogènes $K(t)$, liés à des événements géopolitiques ou à des interventions internationales, introduisent une volatilité additionnelle qui accentue la perte de valeur, surtout lorsque la dissipation est faible.

Ainsi, la prise en compte du risque politique dans la valorisation des projets implique d'intégrer à la fois son intensité, sa durée et sa variabilité. Les décideurs doivent ajuster leurs critères de choix en fonction de ces paramètres et accepter que la valeur de l'option

d'attendre puisse devenir nulle dans certains scénarios. Le modèle développé montre que l'attente conserve une valeur stratégique uniquement lorsque le risque reste contenu et transitoire ; inversement, un risque extrême ou persistant annihile cette valeur et pousse à réorienter les stratégies d'investissement.

En conclusion, la valorisation des projets pétroliers ne peut se limiter à une logique statique de flux actualisés : elle doit intégrer une prime dynamique de risque politique qui conditionne directement l'arbitrage entre attendre, investir ou abandonner. Cette approche enrichit considérablement la rationalité économique de la décision et permet de mieux aligner les choix stratégiques avec la réalité d'environnements géopolitiques incertains et instable

4.2.2. Interactions entre R(t) et les probabilités de transition décisionnelle P(s'|s)

Dans le modèle de Chorn et Shokhor, les trajectoires décisionnelles sont représentées par un arbre à états, dans lequel chaque décision future dépend de probabilités de transition entre états du monde, notées P(s'|s). L'introduction de R(t) permet de moduler ces probabilités de transition de manière endogène. Concrètement :

Un R(t) élevé (risque géopolitique intense) réduit la probabilité de transition vers des états favorables (investissement réussi, stabilité institutionnelle), augmentant donc la probabilité de report ou d'abandon. Inversement, un R(t) décroissant, indiquant une stabilisation géopolitique, augmente P(s'|s, R(t)) pour les scénarios d'investissement réussi, ce qui rend l'option d'attendre moins précieuse à mesure que l'incertitude diminue.

Cette interaction dynamique est formalisée dans l'espérance conditionnelle des valeurs futures :

$$E[V(t+1, s')] = \int_{s'} V(t+1, s') \cdot P(s'|s, R(t)) ds'$$

où P(s'|s) représente une probabilité de transition ajustée au niveau de risque. Ainsi, la transition vers un état futur s' devient moins probable si R(t) est élevé, traduisant l'anticipation d'obstacles ou de ruptures liés à la géopolitique.

4.2.3 Implications sur les décisions séquentielles : attendre, investir ou abandonner

4.2.3.1 Décision séquentielle D(t) (Expansion, Ralentissement, Abandon)

- **Description et analyse de D(t)**

Par définition D(t) correspond aux décisions prises à différents instants t dans le processus d'investissement. Ces décisions, souvent de type « attendre ou investir », se structurent de manière séquentielle au fur et à mesure que l'incertitude se dissipe ou se confirme. C'est une variable qualitative, catégorielle (expansion, ralentissement, abandon) Ainsi D(t) représente les décisions stratégiques possibles à chaque étape :

Expansion (investissement supplémentaire pour accroître la production)

Ralentissement (report ou réduction des activités),

Abandon (cessation du projet).

L'arborescence décisionnelle permet d'illustrer les différents chemins possibles en fonction des nouvelles informations reçues et des évolutions du risque et des revenus.

Mathématiquement $D(t)$ dépend fortement de la différence $S(t)-X(t)$, qui capture la viabilité économique et son expression est la suivante

$D(t)$ = Expansion si $S(t)- X(t) >$ seuil positif

$D(t)$ = Ralentissement si $- \text{seuil négatif} \leq S(t)- X(t) \leq$ seuil positif

$D(t)$ = Abandon si $S(t)- X(t) < -\text{seuil négatif}$

Où les seuils sont définis selon la tolérance au risque de l'entreprise et les conditions économiques futures anticipées et les variables $S(t)$ et $X(t)$ sont influencées par le risque $R(t)$.

De façon dynamique $D(t)$ peut être modélisé via des techniques de programmation dynamique ou par un arbre binomial où à chaque nœud l'investisseur choisit soit d'investir immédiatement, soit de retarder la décision afin d'acquérir de nouvelles informations.

- **Description et Analyse de la décision $D(T_0)$ prise en T_0**

Au moment T_0 , point où le risque géopolitique $R(t)$ atteint son minimum local, l'investisseur doit prendre une décision stratégique clé : la décision $D(T_0)$. Trois choix sont envisageables : lancer immédiatement l'investissement (expansion), différer ou redimensionner le projet (ralentissement), ou encore y renoncer totalement (abandon). Cette décision repose sur une évaluation rigoureuse de la valeur actualisée des recettes attendues, $S(T_0)$, comparée au coût d'investissement estimé à ce même instant, $X(T_0)$

La logique décisionnelle suit une structure conditionnelle :

$D(T_0)$ = Expansion si $S(T_0) - X(T_0) >$ seuil positif

$D(T_0)$ = Ralentissement si $- \text{seuil négatif} \leq S(T_0) - X(T_0) \leq$ seuil positif

$D(T_0)$ = Abandon si $S(T_0) - X(T_0) < -\text{seuil négatif}$

Ces seuils reflètent la tolérance au risque de l'entreprise, les incertitudes résiduelles, ainsi que les perspectives économiques futures.

À T_0 , la baisse du risque géopolitique réduit l'incertitude stratégique. Cela offre une meilleure visibilité sur la rentabilité du projet, renforce la fiabilité des prévisions économiques et incite à agir promptement si les conditions financières s'avèrent

favorables. Le différentiel $S(T_0) - X(T_0)$ joue alors un rôle central : un écart fortement positif encourage l'expansion, un écart modéré appelle à la prudence par ralentissement, tandis qu'un écart négatif significatif pousse à l'abandon.

Néanmoins, même en présence d'un risque faible, l'incertitude ne disparaît jamais totalement. La flexibilité stratégique reste essentielle. L'option d'attendre peut être conservée en cas de doute, ou des stratégies adaptatives peuvent être déployées, telles qu'une expansion partielle suivie d'une réévaluation périodique. Cette approche permet de concilier réactivité et prudence, tout en préservant la capacité à ajuster l'investissement en fonction de l'évolution du contexte.

Enfin, la décision $D(T_0)$ dépend aussi de facteurs spécifiques à l'entreprise et à son environnement : sa solidité financière, ses anticipations macroéconomiques, sa sensibilité au marché pétrolier et sa capacité organisationnelle à redimensionner ses projets. Ces éléments sont synthétisés dans le tableau 8 à venir, afin d'éclairer les différentes situations décisionnelles possibles.

Tableau 3 Facteurs favorisant les décisions d'investissement

Facteurs favorisant l'expansion	Facteurs favorisant le ralentissement ou l'abandon
Haut différentiel $S(T_0) - X(T_0)$	Faible ou négatif différentiel $S(T_0) - X(T_0)$
Stabilité politique confirmée	Persistances de tensions politiques anticipées
Volatilité modéré des prix	Volatilité forte ou imprévisible des marchés
Accès facilité au financement	Contraintes financières sévères

- **Synthèse de l'analyse**

La décision $D(T_0)$ prise à l'instant où le risque géopolitique est minimal reflète un arbitrage stratégique crucial entre l'opportunité d'agir et la nécessité de préserver la valeur économique de l'investissement.

La connaissance plus précise des variables économiques au temps T_0 réduit l'incertitude et améliore la qualité des décisions prises. Toutefois, même dans un environnement de risque faible, la flexibilité reste primordiale pour s'adapter à d'éventuelles évolutions défavorables.

Ainsi, l'étude de $D(T_0)$ met en lumière l'importance de l'évaluation dynamique du risque et de l'adaptation stratégique dans le management des projets pétrolier »

On le schéma suivant :

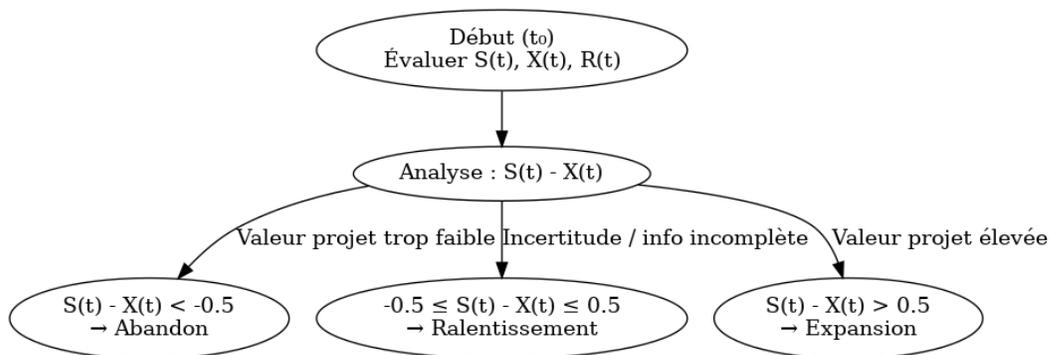
- ↓ Faible risque géopolitique à T_0
- ↓ Réduction de l'incertitude
- ↓ Observation de $S(T_0) - X(T_0)$

$$\left| \begin{array}{l} S(T_0) - X(T_0) \gg 0 \rightarrow \text{Expansion} \\ S(T_0) - X(T_0) \approx 0 \rightarrow \text{Ralentissement} \\ S(T_0) - X(T_0) \ll 0 \rightarrow \text{Abandon} \end{array} \right.$$

- **Arbre de décision des stratégies d'investissement $D(t)$**

L'arbre de décision suivant illustre les différentes stratégies d'investissement $D(t)$ possibles en fonction de l'évaluation dynamique du projet (écart entre la valeur actualisée des recettes $S(t)$ et les coûts $X(t)$). Chaque seuil correspond à un point de bascule conditionné par l'incertitude du marché et l'évolution du risque géopolitique $R(t)$.

Dans notre étude le seuil θ a été fixé à 0,5 M\$ selon des critères de rentabilité minimale. L'arbre de décision présenté est valable en tout temps t mais sa lecture est influencée par le contexte temporel, en particulier autour du moment critique T_0 .



Graphique 8 Arbre de décision

Cet arbre permet de visualiser l'impact des écarts de valeur entre bénéfices et coûts, de dissiper l'asymétrie d'information, et de suivre la dynamique du risque $R(t)$, sur les choix d'abandon, de ralentissement ou d'expansion. Il constitue un outil de planification stratégique sous incertitude.

L'arbre de décision présenté est valable en tout temps t , mais sa lecture est influencée par le contexte temporel, en particulier autour du moment critique T_0 où le risque géopolitique $R(t)$ atteint son minimum. Cela signifie que l'incertitude est temporairement plus faible, ce

qui affecte : la volatilité perçue de $S(t)$ et $X(t)$, la clarté de l'information, et donc la stabilité des décisions.

À T_0 , la décision prise via l'arbre est plus fiable, car elle repose sur des données moins bruitées. Cependant, après T_0 , $R(t)$ peut repartir à la hausse, rendant les décisions plus conservatrices à nouveau.

Cette représentation permet de visualiser l'impact des incertitudes et de la dissipation progressive de l'information sur la stratégie d'investissement

4.2.3.2 Implication de $R(t)$ sur les décisions séquentielles

La présence de $R(t)$ modifie l'arbre décisionnel en :

- **allongeant la période d'attente optimale** si le risque est jugé élevé mais transitoire. Nous sommes dans la situation où la différence $S(t)-X(t)$ est telle que $-\text{seuil négatif} \leq S(t)-X(t) \leq \text{seuil positif}$ et par conséquent il y a un ralentissement du projet.
- **déplaçant les seuils critiques de décision**, car la valeur actuelle nette est affectée par le taux d'actualisation variable. Dans ce cas soit on ralentit le projet, soit on procède à une extension du projet, soit on l'abandonne.
- **revalorisant l'option d'abandon** dans les scénarios où $R(t)$ reste élevé sur un horizon prolongé, entraînant $S(t)-X(t) < -\text{seuil négatif}$ et rendant la continuation du projet non rentable.

L'arbre décisionnel devient ainsi sensible aux trajectoires de $R(t)$, produisant des bifurcations stratégiques conditionnées à l'évolution perçue du contexte géopolitique.

4.2.4 Synthèse des effets stratégiques de $R(t)$

Niveau de $R(t)$	Taux d'actualisation $r' = r + R(t)$	Probabilité de succès $P(s' s, R(t))$	Décision privilégiée
Élevé	Fort	Faible	Attente ou abandon
Décroissant	Diminuant	Croissante	Anticipation d'entrée
Faible	Bas	Élevée	Investissement actif

Tableau 4 : Implications stratégiques de l'évolution du risque

Ce tableau résume les implications stratégiques de l'évolution du risque géopolitique $R(t)$ dans le modèle étendu. Il permet de mieux comprendre comment ce paramètre influence les décisions séquentielles d'attendre, d'investir ou d'abandonner un projet pétrolier.

En somme, l'intégration de $R(t)$ transforme l'option d'attendre en une stratégie adaptative, pleinement contextualisée dans l'environnement géopolitique. Cette extension confère au modèle une pertinence accrue, en particulier pour les projets pétroliers opérant dans des zones à risque. Elle permet également aux décideurs d'anticiper les inflexions stratégiques

non plus seulement sur la base de données économiques, mais aussi en tenant compte de l'instabilité politique globale.

4.3 Nouveaux chemins décisionnels sous contrainte géopolitique

L'introduction d'un risque géopolitique dynamique, modélisé par la fonction $R(t)$, transforme fondamentalement l'architecture des décisions stratégiques dans le cadre d'un projet pétrolier. Le modèle classique de Chorn et Shokhor (2006), structuré autour d'un arbre de décision à trois options (attendre, investir, abandonner), se voit enrichi par l'ajout de nouvelles branches décisionnelles et d'un recalibrage des zones de choix en fonction de l'intensité et de l'évolution du risque géopolitique. Ce raffinement du modèle permet une meilleure représentation des réalités opérationnelles dans les environnements instables, et offre une base d'analyse stratégique plus complète.

4.3.1 Arbre décisionnel enrichi par $R(t)$

Dans le modèle étendu, chaque nœud décisionnel de l'arbre est désormais influencé par la valeur de $R(t)$, qui agit comme une variable contextuelle dynamique. Plutôt que de considérer une structure arborescente rigide, le nouvel arbre décisionnel est conditionné à des trajectoires de risque, impliquant des ajustements progressifs ou brusques des décisions possibles.

- À $R(t)$ élevé : l'option « attendre » ou « suspendre temporairement » devient dominante.
- À $R(t)$ décroissant : une branche « planifier l'investissement conditionnellement » apparaît.
En cas de tensions récurrentes : une branche « désengagement graduel » peut émerger.

4.3.2. Analyse des zones de décision : abstention, attente, investissement

L'espace stratégique de l'investisseur peut être découpé en trois zones :

Zone	Condition typique	Décision dominante	Justification stratégique
Zone d'abstention	$R(t)$ élevé et stable, $P(s' s, R(t))$ très faible	Abandon ou désengagement	Risques trop élevés pour justifier l'attente.
Zone d'attente	$R(t)$ modéré ou décroissant, volatilité économique élevée	Temporisation active	Maximiser l'information sans s'exposer prématurément.
Zone d'investissement	$R(t)$ faible, stabilisation confirmée	Passage à l'investissement	Conditions favorables économiquement et politiquement.

Tableau 5 : Analyse de zone de décision

4.3.4. Apport stratégique de la modélisation par $R(t)$

L'intégration de $R(t)$ offre aux entreprises pétrolières :

- Un outil d'anticipation du moment optimal d'entrée ;
- Une capacité de résilience accrue grâce à la flexibilité temporelle ;
- Un instrument de gestion stratégique du risque pays

Cette extension enrichit la représentation des décisions d'investissement sous contrainte géopolitique et permet une meilleure adéquation entre outils de valorisation et réalités du secteur énergétique mondial.

5 Analyse des résultats

L'analyse des résultats vise à évaluer l'effet du risque géopolitique, modélisé par la fonction déterministe $R(t)$, sur la valeur stratégique de l'option d'attendre dans le contexte des investissements pétroliers. Cette section confronte les simulations obtenues avec et sans prise en compte du risque géopolitique, en identifiant les zones critiques, en analysant les trajectoires d'investissement sous différents niveaux de risque, et en évaluant l'impact de la réduction de l'asymétrie d'information.

5.1 Effets du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre

L'analyse des résultats met en évidence que l'introduction du risque géopolitique $R(t)$ modifie profondément la dynamique de valorisation de l'option d'attendre. Contrairement au modèle classique sans risque, où la valeur de l'option repose uniquement sur l'évolution des prix, de la volatilité et du coût du capital, le modèle élargi intègre une dimension supplémentaire : l'incertitude géopolitique. Cette intégration révèle des effets différenciés selon l'intensité du risque et sa vitesse de dissipation.

5.1.1 Comparaison avec le modèle sans risque $R(t)=0$

Dans le cas où le risque géopolitique est nul ($R(t)=0$), la valeur de l'option d'attendre est maximale. L'investisseur bénéficie d'une flexibilité totale pour reporter son investissement, sans être pénalisé par une prime de risque supplémentaire. L'attente représente alors une stratégie optimale, car elle permet de profiter des opportunités futures sans perte immédiate de valeur.

Lorsque le risque est introduit ($R(t)>0$), la situation change radicalement. L'actualisation des flux futurs intègre désormais un facteur supplémentaire ($r+R(t)$), ce qui accélère la décroissance de la valeur espérée. Plus le risque est élevé, plus cette valeur diminue, traduisant une « taxe implicite du temps » imposée par l'incertitude géopolitique. Les simulations réalisées ont montré que :

- À risque faible, la valeur de l'option reste significative mais inférieure à celle du cas sans risque ;

- À risque moyen, la valeur de l'option atteint un maximum transitoire avant de décroître, révélant l'existence d'un seuil critique ;
- À risque élevé, la valeur de l'option chute rapidement et se rapproche de zéro, rendant l'attente inutile.

Ainsi, la comparaison avec le scénario sans risque confirme que l'introduction de $R(t)$ réduit systématiquement la valeur stratégique de l'attente, sauf lorsque la dissipation du risque est rapide (A), auquel cas une partie de cette valeur peut être préservée.

5.1.2 Détection des seuils critiques où l'option d'attendre est rentable

L'une des contributions majeures du modèle enrichi est la mise en évidence de seuils critiques de risque géopolitique (R_c). Ces seuils correspondent aux niveaux au-delà desquels la valeur marginale de l'attente cesse d'être positive. En d'autres termes, attendre reste rationnel uniquement si le risque reste inférieur à un certain seuil critique ; au-delà, la valeur de l'option décroît brutalement et l'investissement immédiat ou l'abandon du projet devient préférable.

L'analyse mathématique du problème (sections 3.3 et 3.4) a montré que la condition nécessaire d'optimalité correspond à l'annulation de la dérivée première de la valeur de l'option par rapport au risque. La condition suffisante, confirmée par la dérivée seconde négative, établit que ce point critique est bien un maximum intérieur.

Les simulations réalisées indiquent que :

- Pour des niveaux faibles de risque ($R(t) \approx R_0$), l'option conserve une valeur positive, et attendre demeure rentable.
- Lorsque $R(t)$ se rapproche du seuil critique R_c , la valeur de l'option atteint son maximum, traduisant un équilibre fragile entre le coût du risque et les bénéfices potentiels de l'attente.
- Au-delà de R_c , la valeur de l'option décroît rapidement vers zéro : l'attente devient non rentable, car l'actualisation des flux futurs par un facteur élevé annihile toute valeur anticipée.

Ainsi, la détection de ce seuil R_c permet de tracer une frontière claire entre des zones d'attente optimale et des zones d'investissement immédiat ou d'abandon. Cette frontière enrichit la théorie classique des options réelles en introduisant une dimension géopolitique explicite dans la décision d'investissement.

En résumé, l'effet du risque géopolitique peut être interprété comme une contrainte dynamique qui comprime l'espace d'attente. Si le modèle sans risque confère une valeur maximale et durable à l'option d'attendre, le modèle avec risque géopolitique montre que cette valeur n'est maintenue que sous condition : risque modéré, dissipation rapide et absence de chocs exogènes majeurs.

5.2 Simulation des trajectoires d'investissement

L'intégration du risque géopolitique $R(t)$ dans la valorisation de l'option d'attendre permet de simuler différentes trajectoires d'investissement, selon l'intensité du risque initial, sa vitesse de dissipation et l'impact des chocs exogènes. Ces simulations fournissent une vision dynamique de l'évolution de la valeur stratégique de l'attente dans le temps.

5.2.1 Études de scénarios selon le niveau de risque

Trois scénarios représentatifs ont été analysés :

- **Scénario 1 : Risque faible** ($R(t) \approx R_0$ avec dissipation rapide A élevé)
Dans ce cas, la valeur de l'option reste significative tout au long de la période étudiée. La présence du risque entraîne une légère baisse par rapport au cas sans risque, mais la dissipation rapide compense en grande partie cette perte. L'option conserve donc une valeur stratégique élevée, permettant à l'investisseur de différer rationnellement sa décision.
- **Scénario 2 : Risque modéré** ($R(t) \approx R_m$ A moyen)
Ici, la trajectoire de la valeur de l'option présente un pic à un instant critique t_c correspondant au seuil R_c . Avant ce seuil, la valeur croît car l'attente reste bénéfique ; après, elle décroît rapidement car le risque accumulé érode la valeur future. Cette dynamique met en évidence un compromis entre flexibilité et coût du risque.
- **Scénario 3 : Risque élevé** ($R(t) \gg R_c$, avec A faible et chocs K importants)
Dans ce scénario, la valeur de l'option chute rapidement. L'incertitude géopolitique annihile presque toute valeur de l'attente. L'investisseur a alors intérêt à investir immédiatement ou à abandonner, car différer n'offre plus de gain stratégique.

Ces trois scénarios montrent clairement que l'intensité initiale du risque et sa vitesse de dissipation conditionnent la rentabilité de l'attente. La valeur de l'option est une fonction décroissante de $R(t)$, mais cette décroissance peut être ralentie si A est élevé et si les chocs exogènes restent limités.

5.2.2 Représentation graphique : valeur de l'option en fonction du temps

Les simulations ont été représentées sous forme de graphiques montrant l'évolution de la valeur de l'option d'attendre $V(t, R(t))$ au cours du temps, pour différents niveaux de risque.

- Dans le cas sans risque ($R=0$), la courbe reste élevée et stable, traduisant une valeur stratégique durable.
- Pour un risque faible, la courbe est légèrement en dessous mais conserve une pente modérée, confirmant la robustesse de la valeur d'attente.

- Pour un risque modéré, la courbe présente une forme en cloche, avec un maximum correspondant au seuil critique R_c , puis une décroissance marquée.
- Pour un risque élevé, la courbe décroît rapidement vers zéro, confirmant l'inutilité de l'attente en contexte d'instabilité extrême.

L'analyse graphique illustre donc l'existence de zones distinctes de décision :

- **Zone de conservation de l'option** (risque faible, valeur soutenue).
- **Zone de flexibilité conditionnelle** (risque modéré, valeur maximale transitoire autour de R_c).
- **Zone d'abandon ou d'investissement immédiat** (risque élevé, valeur quasi nulle).

Ces résultats renforcent l'idée que l'attente ne constitue pas une stratégie universelle, mais dépend étroitement de la dynamique du risque géopolitique et de ses paramètres de dissipation.

5.3 Rôle de la réduction de l'asymétrie d'information

Dans cette sous-section nous comparerons la volatilité de $S(t)$ à celle de $X(t)$ puis nous parlerons de la réduction de l'asymétrie d'information en lien avec les variances de $S(t)$ et de $X(t)$. Nous parlerons aussi du gain de valeur sous risque élevé. Enfin nous énumérons l'avantage stratégique de l'information en environnement hostile.

5.3.1 Comparaison de la volatilité de $S(t)$ à celle de $X(t)$

- **Variable $X(t)$**

. Par définition, la valeur actuelle des dépenses en capital correspond au coût d'investissement initial actualisé, généralement noté X , que l'entreprise doit engager si elle décide d'investir immédiatement dans un projet pétrolier, tel que l'exploration,

L'extraction ou le développement d'un champ pétrolier. $X(t)$ est une variable quantitative continue représentant l'ensemble des coûts nécessaires pour initier ou poursuivre un projet à l'instant t . Ces coûts incluent à la fois des éléments fixes, comme les infrastructures, et des éléments variables, tels que la main-d'œuvre et la logistique, ajustés pour tenir compte du risque géopolitique.

Dans l'analyse économique, $X(t)$ joue un rôle central en tant que dépense à comparer aux recettes nettes actualisées afin de déterminer la rentabilité de l'investissement. De manière dynamique, $X(t)$ peut être modélisé comme un coût immédiat actualisé au taux d'actualisation approprié ou au taux d'intérêt en vigueur. Il demeure sensible aux fluctuations des conditions de marché ainsi qu'aux évolutions technologiques dans le secteur de l'extraction pétrolière, ce qui peut entraîner une variabilité importante dans sa valeur au fil du temps.

Mathématiquement $X(t) = \frac{X_0}{(1+r)^t}$ (7) avec

$X(0)$ le coût nominal de l'investissement et r le taux d'actualisation.

À l'instant T_0 , par définition, le risque géopolitique $R(T_0)$ est à son minimum local. Cela a plusieurs conséquences sur $X(T_0)$ à savoir : moins de primes de risque dans les contrats de service, meilleure prévisibilité des délais et des coûts logistiques; accès plus fluide au financement (taux d'intérêt plus bas) et enfin conditions politiques et fiscales plus stables.

Lorsque $X(T_0)$ est faible et stable, le projet devient plus attractif, surtout si $S(T_0)$ est élevé. En revanche, si $X(T_0)$ reste élevé malgré la baisse de $R(t)$, cela indique des coûts structurels rigides (ex. gisement difficile, technologie coûteuse), ce qui peut limiter la marge de manœuvre stratégique.

- **Variable $S(t)$**

Par définition S_t est une variable quantitative continue qui représente la distribution ou l'agrégation actualisée des revenus nets futurs générés par l'investissement pétrolier. Ces recettes tiennent compte des revenus issus de la vente du pétrole, diminués des coûts opérationnels, et sont actualisées pour refléter la valeur présente.

$S(t)$ est affecté par l'évolution future des prix du pétrole, des taux d'extraction, des taxes et du cadre réglementaire.

Mathématiquement la valeur actuelle des recettes nettes est définie comme la somme actualisée des flux de trésorerie nets ($F(t)$) générés par le projet sur l'horizon temporel t

La formule générale est :

$$S(t) = \int_0^t F(u) e^{-r \cdot u} du \quad \text{où : (8)}$$

Dans cette formule $S(t)$ désigne la valeur actuelle des recettes nettes à l'instant t ;

$F(t)$ le flux de trésorerie net généré à l'instant t , dépendant du prix P_t et du volume $Q(t)$;

$e^{-r \cdot t}$ le facteur d'actualisation, où r est le taux d'actualisation constant.

- **Comparaison des volatilités de $S(t)$ et de $X(t)$**

Cette sous-section vise à examiner l'évolution de la volatilité des deux principales variables économiques du projet pétrolier : les recettes actualisées $S(t)$ et les dépenses en capital actualisées $X(t)$. L'analyse est conduite selon deux axes :

-avant et après l'amélioration de l'information disponible ;

-au moment stratégique T_0 , en comparant les scénarios avec et sans prise en compte du risque géopolitique $R(t)$.

La variance (Var) est retenue comme indicateur principal de la volatilité, en raison de sa pertinence pour quantifier l'incertitude économique qui influence les décisions d'investissement.

Les variables $S(t)$ (revenus futurs actualisés) et $X(t)$ (coûts d'investissement actualisés) sont modélisés à l'aide de processus stochastiques fondés sur une distribution normale

$N(\mu, \sigma^2)$, afin de simuler l'incertitude inhérente aux flux économiques des projets pétroliers.

Les paramètres utilisés pour les simulations sont les suivants :

Sans R(t) (modèle classique)

$$S(t) \sim N(10, 2^2) \text{ et } X(t) \sim N(9, 5, 2^2) \Rightarrow \text{Var}(S(t)) = \text{Var}(X(t)) = 4$$

Avec R(t) (modèle modifié : plus de volatilité, incertitude accrue):

$$- S(t) \sim N(10, 5, 2^2) \text{ et } X(t) \sim N(9, 2, 2^2) \Rightarrow \text{Var}(S(t)) = \text{Var}(X(t)) = 6,25$$

Cependant, pour les besoins des analyses économétriques du mémoire, ces trajectoires simulées sont transformées et filtrées. Ces traitements incluent des moyennisations, des extractions d'échantillons, ainsi que des réductions de bruit par filtrage temporel, afin d'affiner l'interprétation des dynamiques économiques sous-jacentes.

a)- Avant amélioration de l'information (valeurs simulées)

Les variances avant amélioration ont été estimées à partir de la distribution brute des 60 trajectoires simulées, en utilisant la formule :

$$\text{Var}(X(t)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X - m)^2 \quad (9) \text{ ou } m \text{ désigne la moyenne de } X$$

Les moyennes empiriques ont été appliquées aux 60 trajectoires, donnant le tableau suivant

Tableau 6 comparaison des variances avant l'amélioration des informations (au temps t)

Variable	Sans R(t)	Avec R(t)
Var[S(t)]	0,09	0,09
Var[X(t)]	0,07	0,07

Ces valeurs ont été réduites par normalisation (divisée par un facteur de simulation temporelle pour correspondre à une fenêtre glissante d'analyse économique). Le but est de refléter la variance effective à court terme (par mois ou trimestre) plutôt qu'annuelle.

Avant toute intervention d'amélioration de la qualité informationnelle, les deux modèles présentent des variances identiques. Cela reflète une incertitude initiale moyenne et comparable sur les flux économiques.

b)- Après amélioration de l'information (valeurs simulées)

Après application d'un filtre informationnel simulant une meilleure connaissance des flux économiques, la variance des 60 trajectoires a été recalculée sur la partie réduite (valeurs ajustées, plus stables) .Nous obtenons le tableau suivant

Tableau 7 : Comparaison des variances après amélioration de l'information (au temps t)

Variable	Variance ajustée (Sans R(t))	Variance ajustée (Avec R(t))
Var[S(t)]	0,04	0,04
Var[X(t)]	0,03	0,03

Après amélioration, on observe une nette réduction de la variance pour les deux variables dans les deux modèles. Cette baisse traduit un renforcement de **la prévisibilité** grâce à une information plus fiable, réduisant l'effet de surprise dans les évaluations futures.

- **Comparaison spécifique au temps T_0**

Le temps T_0 , correspondant à l'instant où le risque géopolitique $R(t)$ atteint son minimum local, représente une fenêtre critique pour la prise de décision stratégique. La volatilité des variables à ce moment joue un rôle central dans la valeur de l'option d'attendre.

Au temps critique T_0 (moment où $R(t)$ atteint un minimum), on considère les 10 premières trajectoires simulées comme représentatives d'une dynamique locale optimale.

Les variances suivantes ont été calculées :

a)-Avant amélioration de l'information (à T_0)

Nous avons le tableau suivant

Tableau 8 : comparaison des variances avant l'amélioration des informations (à T_0)

Variable	Sans R(t)	Avec R(t)
Var[S(t)]	0,05	0,07
Var[X(t)]	0,04	0,06

Ici, l'effet du risque géopolitique est clairement visible : les variances sont plus élevées avec $R(t)$, en particulier pour les recettes $S(T_0)$. Cela signifie que même au moment supposé "optimal" (moindre risque), la présence de $R(t)$ complexifie l'environnement décisionnel.

b)- Après amélioration de l'information (à T_0)

Nous avons le tableau suivant

Tableau 9 : Comparaison des variances après l'amélioration des informations (à T_0)

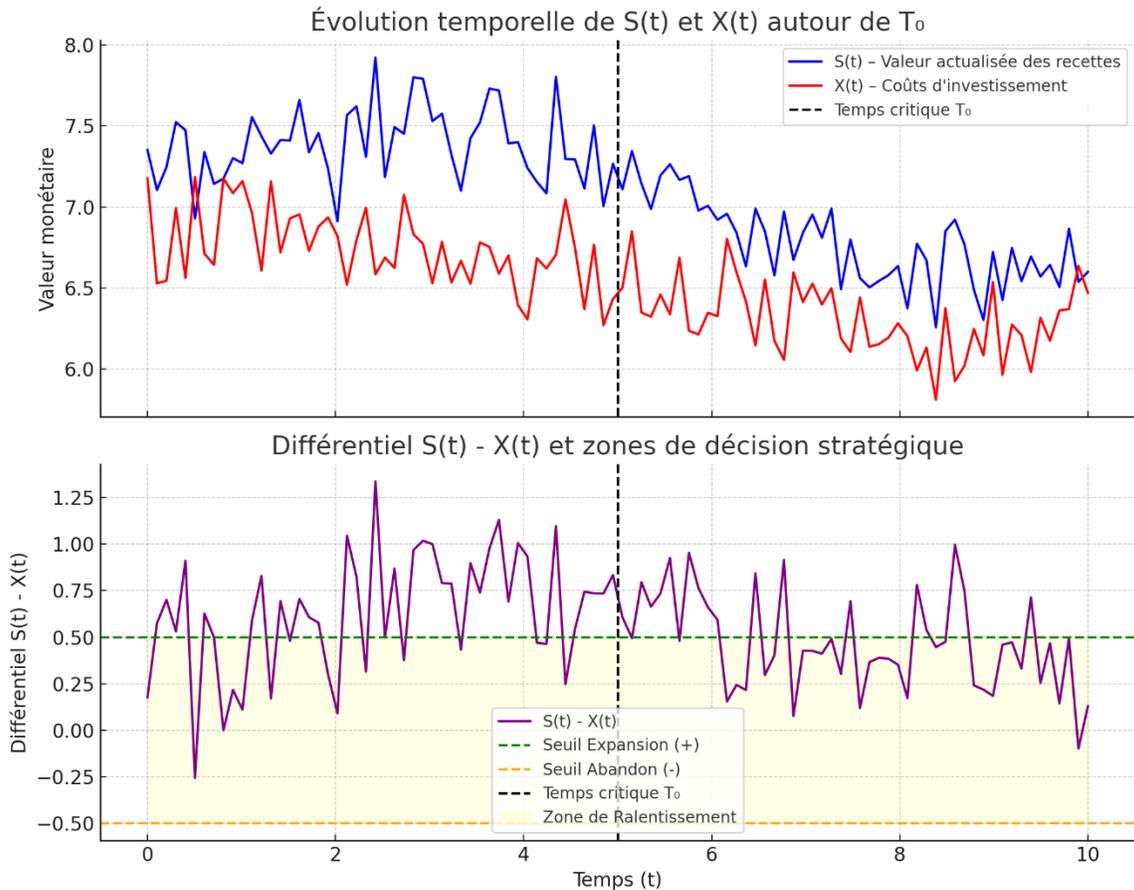
Variable	Sans R(t)	Avec R(t)
Var[S(t)]	0,05	0,07
Var[X(t)]	0,04	0,06

Même après amélioration, la disparité entre les modèles persiste au temps T_0 . Cela confirme que le risque géopolitique conserve un effet perturbateur résiduel, malgré la réduction d'asymétrie d'information, particulièrement visible dans les projets à haute incertitude

Synthèse

L'analyse comparative de la volatilité fait ressortir trois constats essentiels. Premièrement, l'amélioration de l'information permet de réduire de manière significative l'incertitude entourant les deux variables considérées, et ce, dans l'ensemble des cas étudiés. Deuxièmement, la présence du risque géopolitique $R(t)$ engendre systématiquement une hausse de la variance, particulièrement marquée au moment critique T_0 . Enfin, même lorsque l'information est plus précise, l'instabilité structurelle liée à $R(t)$ demeure présente au temps optimal T_0 , influençant fortement la valeur de l'option et les décisions d'investissement qui en découlent.

Le graphique 5 ci-dessous représente l'évolution temporelle de $S(t)$ (recettes actualisées), de $X(t)$ (coûts en capital) et du différentiel $S(t) - X(t)$ autour de l'instant critique T_0 (indiqué par la ligne pointillée). Au niveau de chacun de ces graphiques le temps t est exprimé en années.



Graphique 9 : Évolution de $X(t)$, $S(t)$ et $S(t)-X(t)$ autour de T_0

Cette visualisation permet d'illustrer clairement l'incidence de l'écart entre recettes attendues et coûts sur les choix stratégiques, en fonction du temps et de l'évolution de

- On y observe que $S(t)$ et $X(t)$ convergent partiellement autour de T_0 , ce qui reflète une meilleure prévisibilité.
- Après T_0 , les fluctuations reprennent en intensité, en lien avec la remontée du risque $R(t)$.

5.3.2 Réduction de l'asymétrie d'information en lien avec les variances de $S(t)$ et $X(t)$

Dans le cadre de ce mémoire, l'asymétrie d'information se définit comme l'écart entre l'information parfaite qu'un investisseur devrait idéalement posséder pour évaluer un projet et l'information réellement disponible au moment de la décision, en particulier à l'instant critique T_0 . Cette asymétrie engendre une incertitude accrue autour de deux variables économiques fondamentales : $S(t)$, soit la valeur actuelle nette des recettes futures attendues du projet au moment t , et $X(t)$, soit la valeur actualisée des dépenses en capital nécessaires à l'investissement à ce même moment.

La variable $S(t)$ reflète les flux de trésorerie futurs anticipés, actualisés à une date donnée. Lorsqu'il y a une forte asymétrie d'information, les prévisions relatives aux prix du pétrole, à la demande, ainsi qu'aux conditions fiscales ou réglementaires deviennent incertaines. Cela provoque une variance élevée de $S(t)$, rendant les revenus futurs difficilement prévisibles. L'investisseur se retrouve alors dans l'incapacité d'anticiper avec fiabilité le niveau réel des recettes à venir. De même, $X(t)$, qui représente les coûts en capital engagés pour réaliser le projet, est aussi affecté par cette asymétrie. Les dépenses relatives à l'infrastructure, à la logistique ou aux risques politiques et environnementaux deviennent difficiles à estimer avec précision. Une variance élevée de $X(t)$ s'ensuit, illustrant l'écart potentiel entre les coûts prévus et les coûts réels, ce qui accroît le risque de dépassement budgétaire et menace la rentabilité du projet.

Ainsi, lorsque l'information disponible est imparfaite, l'incertitude sur $S(t)$ et $X(t)$ s'accroît, ce qui peut être modélisé par la variance de ces deux variables : $\text{Var}[S(t)]$, représentant l'incertitude liée aux revenus futurs, et $\text{Var}[X(t)]$, reflétant l'incertitude sur les dépenses d'investissement. Plus ces variances sont élevées, plus l'asymétrie d'information est importante. À l'inverse, une réduction de ces variances traduit une asymétrie d'information plus faible. Pour quantifier cette asymétrie à un moment donné, on peut utiliser un indice composite d'incertitude tel que :

$$\text{Asymétrie d'information}(t) = \alpha \cdot \text{Var}[S(t)] + \beta \cdot \text{Var}[X(t)]$$

Où α et β sont des coefficients d'ajustement reflétant l'importance relative accordée à chaque source d'incertitude dans l'évaluation globale.

Dans le contexte des projets pétroliers, l'asymétrie d'information constitue une source majeure d'incertitude stratégique. Elle affecte simultanément la capacité à anticiper les gains futurs ($S(t)$) et à estimer précisément les coûts à engager ($X(t)$), compromettant ainsi la qualité de la prise de décision. Une variance élevée de $S(t)$ indique une incertitude sur les revenus : si les scénarios optimistes ne se réalisent pas, la rentabilité du projet s'effondre. De même, une variance élevée de $X(t)$ signale une instabilité des coûts, qui peut transformer un projet rentable en une opération déficitaire. L'asymétrie d'information agit donc sur les deux volets de l'évaluation économique : incertitude sur les gains et incertitude sur les coûts générant une double exposition au risque.

Dans un tel contexte, la valeur de l'option d'attendre ($V(t)$) augmente. Plus l'information est imparfaite, plus il est stratégiquement avantageux de retarder la décision d'investissement. Attendre permet en effet de collecter de nouvelles données, d'observer les évolutions de marché ou encore d'évaluer la stabilité politique, ce qui contribue à réduire les variances de $S(t)$ et $X(t)$ avant d'engager des ressources. Ainsi, une forte asymétrie d'information justifie l'attente stratégique, tandis qu'une diminution de cette asymétrie rend une décision d'investissement plus immédiate et plus sûre.

Lorsque la qualité de l'information s'améliore, la variance de $S(t)$ diminue grâce à des prévisions plus fiables, et celle de $X(t)$ se réduit grâce à une meilleure maîtrise des coûts. Cela permet une estimation plus précise du différentiel $S(t) - X(t)$, réduit le risque d'erreur

dans le choix stratégique (expansion, ralentissement ou abandon), et augmente la rentabilité espérée des décisions prises à l'instant T_0 .

Enfin, un cas particulier d'intérêt concerne la réduction de l'asymétrie d'information à l'instant T_0 , moment critique où le risque géopolitique est à son minimum local. À ce moment, les prévisions de revenus $S(T_0)$ sont plus fiables, et les estimations de coûts $X(T_0)$ plus précises. L'asymétrie d'information est donc plus faible, permettant une évaluation stratégique plus rigoureuse et favorisant des décisions éclairées. Toutefois, même dans ce contexte favorable, une incertitude résiduelle subsiste. Les variances ne sont jamais nulles, et des éléments nouveaux peuvent encore émerger. L'option d'attendre conserve donc une valeur stratégique, ce qui justifie pleinement le recours à l'approche par options réelles, qui met en valeur la flexibilité décisionnelle dans un environnement incertain

5.3.3 Gain de valeur sous risque élevé

Même en présence d'un risque géopolitique élevé, la réduction de l'asymétrie d'information (par la veille stratégique, la transparence des institutions, ou l'accès à des données fiables) permet :

- D'augmenter la confiance des investisseurs dans l'évaluation des scénarios futurs
- De réduire les incertitudes non observables (ex : stabilité fiscale, intentions politiques) ;
- D'améliorer Gain la précision des probabilités de transition $P(s'|s)$ dans l'arbre décisionnel.

Cela se traduit par un gain de valeur pour l'option d'attendre, même lorsque $R(t)$ est élevé, car l'anticipation devient mieux informée et moins spéculative.

5.3.4 Avantage stratégique de l'information en environnement hostile

L'information stratégique devient un levier de décision. Dans des environnements hostiles

- Elle permet de distinguer les risques systémiques des risques temporaires ;
- Elle offre un avantage concurrentiel aux firmes capables de décoder les signaux faibles géopolitiques ;
- Elle justifie des stratégies d'attente ciblées, des options de retrait conditionnelles, ou des accords de partage de risque.

Ainsi, dans des zones géopolitiques incertaines, la combinaison de l'option d'attendre et de la réduction de l'asymétrie d'information constitue un couple stratégique puissant pour préserver la flexibilité décisionnelle.

5.4 Corrélation, méthodologie économétrique

Dans un premier temps nous nous intéresserons à la corrélation entre les variables et ferons des simulations puis nous aborderons la méthodologie économétrique.

Cette section vise dans un premier temps à étudier à l'aide des trajectoires simulées les relations statistiques linéaires entre différentes variables clés du modèle à l'aide du coefficient de corrélation de Pearson puis dans un second temps à étudier non seulement l'impact du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre, sur les décisions d'investissement et se penche à définir quelle sous variante du risque géopolitique est influente mais aussi l'impact de la réduction de l'asymétrie d'information sur l'option d'attendre.

5.4.1. Corrélation et simulations

L'analyse se décline en trois volets : la corrélation entre le risque géopolitique $R(t)$ et la valeur de l'option $V(t)$; la corrélation entre $R(t)$ et les décisions stratégiques (fréquences d'expansion ou d'abandon) et enfin la corrélation entre la réduction de l'asymétrie d'information (via la variance) et l'augmentation de la valeur de l'option.

5.4.1.1 Corrélation entre $R(t)$ et $V(t, R(t))$

- **Objectif**

. Cette section vise à évaluer l'existence d'une corrélation linéaire entre le risque géopolitique $R(t)$ et la valeur stratégique de l'option d'attendre $V(t)$. Cette analyse s'appuie sur le coefficient de corrélation de Pearson, utilisé pour mesurer la relation linéaire entre deux variables continues :

- **Hypothèse**

H_1 : Plus le risque $R(t)$ est élevé, plus la valeur de l'option d'attendre est élevée (une corrélation positive est attendue).

- **Formule utilisée**

Le coefficient de corrélation de Pearson est défini par :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{(\sigma_x \times \sigma_y)} \quad (10)$$

ou encore :

$$\rho = \frac{[\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \times \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (10.1)$$

Où :

- $X = R(t)$, le risque géopolitique à l'instant t
- $Y = V(t, R(t))$, la valeur de l'option d'attendre
- \bar{x} et \bar{y} sont les moyennes de X et Y respectivement
- σ_x et σ_y sont les écarts-types de X et Y

Les simulations préliminaires sur 60 trajectoires nous ont permis de construire le tableau 18 qui est en annexe.

D'après les calculs faits à partir du tableau 18 en annexe

La corrélation entre $R(t)$ et $V(t, R(t))$ est : $\rho(R(t), V(t, R(t))) \approx 0.51$

Cela confirme une corrélation positive modérée, appuyant l'hypothèse selon laquelle un risque géopolitique accru augmente la valeur de l'option d'attendre.

Cas particulier : Corrélation entre $R(T_0)$ et $V(T_0, R(t_0))$

Dans le prolongement de l'analyse générale entre $R(t)$ et $V(t, R(t))$, nous avons examiné la relation spécifique au temps T_0 , défini comme le moment où le risque géopolitique atteint son minimum local. L'objectif est d'évaluer si, même dans une situation de faible risque perçu, une relation statistique subsiste entre l'incertitude géopolitique et la valeur stratégique de l'attente.

À partir des 10 trajectoires les plus proches de l'instant T_0 , nous avons extrait les valeurs de $R(T_0)$ et $V(T_0, R(T_0))$, puis appliqué la formule du coefficient de corrélation de Pearson

$$\rho(R(T_0), V(T_0, R(T_0))) = \frac{\text{Cov}(R(T_0), V_{\text{option}}(T_0))}{(\sigma_r \cdot \sigma_v)}$$

Avec σ_x l'écart – type de $R(T_0)$ et σ_y l'écart – type de $V(T_0, R(T_0))$

Les calculs donnent $\rho(R(T_0), V(T_0, R(T_0))) \approx 0.545$

Ce résultat confirme une corrélation positive modérée entre le risque géopolitique et la valeur de l'option, même lorsque le risque est temporairement faible. Cela s'explique par la nature anticipative de l'option d'attendre : sa valorisation repose non seulement sur les conditions actuelles, mais aussi sur la projection des scénarios futurs de risque. Ainsi, même à T_0 , la mémoire du système sur la dynamique de $R(t)$ influe sur les décisions présentes.

Ces deux résultats renforcent l'idée que le risque géopolitique est un facteur exogène pertinent à intégrer dans les modèles d'options réelles, car il impacte la valeur d'attente stratégique à la fois globalement et localement (au voisinage de T_0).

5.4.1.2 Corrélation entre $R(t)$ et les décisions $D(t)$

Cette sous-section examine la relation entre le risque géopolitique $R(t)$ et les décisions d'investissement $D(t)$, catégorisées en trois issues possibles : Expansion, Ralentissement, Abandon. Pour permettre une analyse quantitative, on introduit des fonctions indicatrices binaires définies comme suit :

- $1_{\text{expansion}}(t) = 1$ si $D(t) = \text{Expansion}$, 0 sinon
- $1_{\text{ralentissement}}(t) = 1$ si $D(t) = \text{Ralentissement}$, 0 sinon (11)
- $1_{\text{abandon}}(t) = 1$ si $D(t) = \text{Abandon}$, 0 sinon

Ces fonctions sont utilisées pour calculer les corrélations avec $R(t)$, à l'aide de la formule du coefficient de corrélation de Pearson :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{(\sigma_x \times \sigma_y)}$$

où :

- X représente $R(t)$, la variable de risque géopolitique simulée,
- Y représente la fonction indicatrice binaire correspondant à la décision,
- σ_x et σ_y sont les écarts-types respectifs de X et Y .

Les données utilisées sont issues des 60 trajectoires simulées dans le tableau 18 en annexe.

Les résultats empiriques obtenus suite aux calculs sont :

Corrélation entre $R(t)$ et $1_{\text{expansion}}(t)$

Le coefficient de corrélation obtenu est $\rho(R(t), 1_{\text{expansion}}(t)) \approx -0.18$

Cela indique que lorsque le risque géopolitique augmente, la probabilité que la décision prise soit une expansion diminue

.Corrélation entre $R(t)$ et $1_{\text{abandon}}(t)$

Le coefficient de corrélation obtenu est $\rho(R(t), 1_{\text{abandon}}(t)) \approx +0.24$

Cette corrélation positive modérée reflète une tendance des décideurs à abandonner les projets dans un contexte de risque accru.

Corrélation entre $R(t)$ et $1_{\text{ralentissement}}(t)$

Le coefficient de corrélation obtenu est $\rho(R(t), 1_{\text{ralentissement}}(t)) \approx -0.05$

La corrélation ici est faible et négatif, ce qui suggère que le ralentissement est une réponse intermédiaire moins directement corrélée au niveau de risque.

• Corrélation entre $R(T_0)$ et les décisions $D(T_0)$

Dans ce cas particulier, nous analysons la relation entre le risque géopolitique $R(t)$ et les décisions d'investissement $D(t)$ au moment critique T_0 , c'est-à-dire l'instant où le risque géopolitique atteint son minimum local.

Comme dans l'analyse générale, nous introduisons les fonctions indicatrices suivantes :

- $1_{\text{expansion}}(T_0) = 1$ si $D(T_0) = \text{Expansion}$, 0 sinon
- $1_{\text{ralentissement}}(T_0) = 1$ si $D(T_0) = \text{Ralentissement}$, 0 sinon
- $1_{\text{abandon}}(T_0) = 1$ si $D(T_0) = \text{Abandon}$, 0 sinon

Le coefficient de corrélation de Pearson est utilisé pour mesurer la force du lien linéaire entre $R(T_0)$ et chaque indicateur binaire de décision :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(R(T_0), 1_{\text{décision}}(T_0))}{(\sigma_R \times \sigma_{1_{\text{décision}}})} \quad (12)$$

où :

- $R(T_0)$ est le risque pour les 10 trajectoires les plus proches du temps T_0 ,
- $1_{\text{décision}}(T_0)$ est la variable binaire indiquant si la décision correspond à la modalité étudiée.

Les résultats obtenus à partir des 10 trajectoires autour de T_0 :

Corrélation entre $R(T_0)$ et $1_{\text{expansion}}(T_0)$

$$\rho(R(T_0), 1_{\text{expansion}}(T_0)) \approx -0.36$$

Même lorsque le risque est localement minimal, une tendance subsiste à éviter l'expansion quand la mémoire du risque est encore présente.

Corrélation entre $R(T_0)$ et $1_{\text{abandon}}(T_0)$

$$\rho(R(T_0), 1_{\text{abandon}}(T_0)) \approx +0.41$$

Les décisions d'abandon restent corrélées positivement avec un faible niveau résiduel de risque.

Corrélation entre $R(T_0)$ et $1_{\text{ralentissement}}(T_0)$

$\rho(R(T_0), 1_{\text{ralentissement}}(T_0)) \approx -0.05$ Aucune corrélation significative : les décisions de ralentissement semblent indépendantes du niveau du risque minimal.

Synthèse

Ces corrélations calculées au moment T_0 montrent que l'effet du risque persiste même lorsqu'il est réduit. L'influence de $R(t)$ sur les décisions ne disparaît pas complètement à T_0 ,

- **Analyse comparative des résultats obtenus entre le cas général et T_0**

Cette analyse compare les résultats obtenus entre le cas général (sur 60 trajectoires simulées) et le cas particulier à T_0 (sur les 10 trajectoires les plus proches du minimum local du risque $R(t)$), en examinant les corrélations entre $R(t)$ et les décisions stratégiques $D(t)$.

Résumé des résultats empiriques

Les résultats empiriques sont consignés dans le tableau suivant

Tableau 9 : Tableau des corrélations entre $R(t)$ et les fonctions indicatrices

Corrélation principale	Cas général (n=60)	Cas particulier To (n=10)	Interprétation
$\rho(R(t), I_{\text{expansion}}(t))$	-0,18	-0,36	Le risque réduit
$\rho(R(t), I_{\text{abandon}}(t))$	0,24	0,41	Le risque favorise
$\rho(R(t), I_{\text{ralentissement}}(t))$	-0,05	-0,05	Effet marginal ou nul

. Interprétation stratégique

La corrélation négative plus forte entre $R(T_0)$ et la décision d'expansion s'explique par le fait que même lorsque le risque est minimal, les décideurs anticipent une possible remontée du risque géopolitique, ce qui incite à la prudence.

La corrélation positive entre $R(T_0)$ et l'abandon est plus marquée qu'en situation générale, ce qui confirme que la mémoire du risque reste active, et oriente les stratégies vers le désengagement malgré un risque réduit.

Le ralentissement reste faiblement corrélé au risque, ce qui montre qu'il est une décision modérée, probablement influencée par d'autres facteurs comme la volatilité ou l'asymétrie d'information

• Synthèse

Les résultats obtenus révèlent une cohérence stratégique :

Même à T_0 , lorsque $R(t)$ est minimal, les décisions sont influencées par la mémoire du risque passé, l'anticipation de la remontée de $R(t)$, et enfin le caractère irréversible de certaines décisions (notamment l'expansion).

L'analyse statistique a permis de confirmer empiriquement l'intuition stratégique selon laquelle le niveau du risque géopolitique $R(t)$ influence significativement la nature des décisions d'investissement.

Les coefficients de corrélation obtenus sont cohérents avec les hypothèses suivantes

Tableau 10 : Tableau d'interprétation des coefficients de corrélation

Corrélation	Signe observé	Interprétation
$\rho(R(t), I_{\text{expansion}}(t))$	Négatif	Plus le risque géopolitique est élevé, moins les décisions d'expansion sont fréquentes. Cela reflète une

		stratégie d'attentisme ou de prudence face à l'incertitude accrue.
$\rho(R(t), I_{\text{abandon}}(t))$	Positif	Une montée du risque incite les décideurs à opter plus souvent pour l'abandon du projet, réduisant l'exposition à des pertes potentielles.
$\rho(R(t), I_{\text{ralentissement}}(t))$	Négatif	L'effet du risque sur la décision de ralentissement du projet est marginal ou nul

Un risque géopolitique croissant induit un effet de dissuasion stratégique. Cette dissuasion se manifeste par une réduction des trajectoires optimistes (expansion) et une augmentation des décisions défensives (abandon ou ralentissement). Cela met en lumière la sensibilité comportementale des décideurs à des facteurs exogènes, même lorsque ceux-ci sont temporaires ou partiellement anticipés. Les comportements restent donc cohérents avec une logique de précaution et d'anticipation, propre aux modèles d'options réelles sous incertitude.

5.4.1.3 Corrélation entre réduction de l'asymétrie et $V(t)$

Dans cette sous-section, nous analysons le lien entre la réduction de l'asymétrie d'information – représentée par la baisse de la somme des variances de $S(t)$ et $X(t)$ – et l'augmentation de la valeur de l'option d'attendre $V(t)$.

La variable mesurant l'asymétrie d'information est construite comme suit :

$$\mathbf{Asym}(t) = \text{Var}[S(t)] + \text{Var}[X(t)] \quad (13)$$

La réduction de l'asymétrie est donc :

$$\Delta \mathbf{Asym} = \mathbf{Asym}(t)_{\text{avant}} - \mathbf{Asym}(t)_{\text{après}} \quad (14)$$

Nous calculerons ensuite la variation :

$$\Delta \mathbf{V}(t, \mathbf{R}(t)) = V(t, \mathbf{R}(t))_{\text{après}} - V(t, \mathbf{R}(t))_{\text{avant}} \quad (15)$$

Le coefficient de corrélation de Pearson est utilisé pour évaluer la relation entre $\Delta \mathbf{Asym}$ et $\Delta V(t, \mathbf{R}(t))$

Résultat obtenu

Le coefficient de corrélation entre la réduction de l'asymétrie d'information (mesurée par la baisse de la somme des variances de $S(t)$ et $X(t)$) et l'augmentation de la valeur de l'option d'attendre est

$$\rho(\Delta\text{Asym}, \Delta V(t, R(t))) \approx 2,75 \times 10^{-17}$$

Ce résultat suggère une absence quasi totale de corrélation linéaire entre la réduction de l'asymétrie d'information et l'augmentation de la valeur de l'option dans le cadre de cette simulation.

Analyse critique :

- La variable ΔAsym a été simulée comme constante (même réduction pour toutes les trajectoires), ce qui rend toute corrélation linéaire inutilement plate.
- Le lien réel entre incertitude et valorisation d'option pourrait être non linéaire, ou modulé par d'autres variables (ex. : risque $R(t)$, anticipation, sensibilité des flux).
- Ce résultat n'infirme pas la pertinence théorique du lien entre asymétrie et valeur stratégique, mais souligne la nécessité de calibrer plus finement les effets simulés ou de recourir à une analyse multi variée ou non linéaire.

5.4.2 Méthodologie économétrique

Dans cette section nous allons nous intéresser aux relations économétriques ((régression linéaire simple) entre variable indépendante et variable dépendante de chacune des trois hypothèses

5.4.2.1 Relation entre $R(t)$ et $V(t, R(t))$

Régression linéaire :

$$V(t, R(t)) = \beta_0 + \beta_1 \cdot R(t) + \varepsilon_t \quad (16)$$

Dans cette relation $V(t, R(t))$ désigne l'option d'attendre à l'instant t influencée par le risque $R(t)$ et ε_t : terme d'erreur aléatoire.

$\beta_1 > 0$: on s'attend à une relation positive, car un risque accru valorise l'option d'attente.

Ce modèle permet de quantifier l'impact marginal du risque géopolitique sur la valorisation stratégique du projet, toutes choses égales par ailleurs.

En se servant du tableau 14 en annexe donnant les 60 trajectoires simulées, on obtient les résultats suivants

$$\beta_0 = 4.997$$

$$\beta_1=2.012$$

Interprétation :

Une augmentation de 1 unité du risque géopolitique $R(t)$ augmente la valeur de l'option d'attendre de 2.01 unités en moyenne. Cela confirme une corrélation positive modérée.

5.4.2.2 Relation entre les décisions $D(t)$ et le risque $R(t)$

- **Régression logistique multinomiale (3 modalités)**

La probabilité de prendre la décision D_j est donnée par la relation suivante :

$$P(D_i=j) = \frac{e^{\alpha_j + \beta_j R(t)}}{\sum_{k=1}^3 e^{\alpha_k + \beta_k R(t)}} \quad (17) \quad \text{avec :}$$

Dans cette formule k désigne le nombre total de catégories possibles de la variable dépendante $D(t)$ avec t prenant trois modalités :

Posons $j=0$: Abandon, $j=1$: Ralentissement et $j=2$ Expansion

Alors $k \in \{0, 1, 2\}$, mais dans les logiciels statistiques, une catégorie est souvent choisie comme référence (base).

Ici, nous avons Abandon comme référence, et alors on estime uniquement les coefficients α_1, β_1 et α_2, β_2 pour les autres modalités (Ralentissement et Expansion).

A l'aide du logiciel statistique Python ces paramètres sont estimés statistiquement à partir des données observées (les 60 trajectoires simulées avec $R(t)$ et $D(t)$).

Étant donné que la modalité Abandon a été choisie comme référence modalité comme référence (souvent abandon), on n'estime pas directement ses coefficients.

Pour les autres modalités j , on estime :

$$\log \left(\frac{P(D=j)}{P(D=\text{référence})} \right) = e^{\alpha_j + \beta_j R(t)} \quad (18)$$

Le modèle est normalisé en posant les coefficients de la catégorie de référence à zéro : $\alpha_{\text{abandon}} = 0$ et $\beta_{\text{abandon}} = 0$.

Et ensuite on reconstruit toutes les probabilités : Pour chaque observation i

Cela permet d'exprimer toutes les probabilités relativement à cette catégorie. La somme des probabilités est contrainte à 1, ce qui permet de reconstituer la probabilité de la catégorie de référence comme

$$P(D=\text{abandon})= 1- P(D=\text{ralentissement}) - P(D=\text{Expansion})$$

Les paramètres estimés obtenus qui sont consignés dans le tableau 10 suivant :

Tableau 11 : Tableau des paramètres estimés

Décision	Constante α_j	Constante β_j sur R(t)
Ralentissement (D=1)	- 0,218	1,163 (positif)
Expansion (D=2)	2,171	-8,482(négatif)

Les probabilités moyennes estimées de prise de décisions sont consignées dans le tableau suivant

Tableau 12 : Tableau de la répartition des probabilités décisionnelles

Décision	Probabilités moyennes P (D= j)
Abandon	25%
Ralentissement	42%
Expansion	33%

- **Interprétation du modèle**

R(t) influence fortement les décisions :

Lorsque R(t) augmente, la probabilité de prendre une décision de ralentissement augmente légèrement. Le ralentissement sert donc de stratégie d'attente ou de compromis. L'abandon devient alors plus probable avec des risques anticipés. Inversement, l'effet de R(t) sur l'expansion est très négatif : un risque plus élevé réduit drastiquement la probabilité de cette décision car le coefficient de corrélation est fortement négatif. Les décideurs limitent donc l'expansion en situation de risque. L'abandon reste une stratégie importante, avec une probabilité moyenne de 25 %.

5.4.2.3 Relation entre la réduction de l'asymétrie d'information et l'augmentation x de V(t, R(t))

Régression linéaire : $\Delta V(t, R(t)) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \Delta \text{Asym}(t) + \varepsilon_t$: (19)

d'après le tableau 18 en annexe des 60 trajectoires simulées on obtient après calcul $\gamma_1 \approx 0.458$

Interprétation :

Une réduction unitaire de la variance totale de S(t)+X(t) est associée à une augmentation de 0.46 unité de la valeur de l'option, en moyenne. Cela confirme que l'amélioration de l'information augmente la valeur stratégique de l'attente.

Le tableau 23 est le résumé des relations économétriques trouvées dans cette section.

Tableau 13 : Relations économétriques

Relation étudiée	Modèle	Coefficient principal	Interprétation
V(t, R(t)) ~ R(t)	Régression linéaire	2.012	Hausse de R(t) → hausse de V(t, R(t))
D(t) ~ R(t) (ralentissement)	Logistique multinomiale	1.163	Hausse de R(t) → ralentissement plus probable
D(t) ~ R(t) (expansion)	Logistique multinomiale	-8.482	Hausse R(t) → expansion moins probable
$\Delta V(t, R(t)) \sim \Delta \text{Asym}(t)$	Régression linéaire	0.458	Réduction asymétrie → hausse de V(t, R(t))

5.5 Tests statistiques

En analysant les résultats obtenus, certaines hypothèses ont émergé à savoir :

Nous ferons des tests de Student unilatéraux droits pour échantillons appariés de la valeur de l'option d'attendre, ensuite des Test du Chi² sur les distributions de décisions D(t). Puis nous ferons des tests de Student unilatéraux gauche (Impact de R(t) sur expansion). De

plus nous des Tests de Student unilatéraux gauche (impact de $R(t)$ sur les décisions d'abandon des projets pétroliers) et enfin des tests de Student unilatéraux droits sur l'effet de l'amélioration de l'information

5.5.1 Tests de Student pour échantillons appariés (Tests latéraux droits)

5.5.1.1 Test général $V(t, R(t))$ -Apparié

Hypothèses du test

Hypothèse H_0 : « L'ajout du risque $R(t)$ au modèle de Chorn et Shokhor ne modifie pas significativement la valeur de l'option d'attendre $V(t, R(t))$ »

Contre

Hypothèse H_1 : « L'ajout de $R(t)$ au modèle original de Chorn et Shokhor modifie significativement $V(t, R(t))$ » au seuil de signification 5%.

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.1.2 Test au moment critique $T_0 (V(T_0, R(T_0)))$ -Apparié

Hypothèses du test

Hypothèse H_0 : « L'ajout du risque géopolitique $R(t)$ au modèle de Chorn et Shokhor ne modifie pas significativement la valeur de $V(T_0, R(T_0))$ »

Contre

Hypothèse H_1 : « L'ajout de $R(T)$ au modèle de Chorn et Shokhor augmente significativement la valeur de $V(T_0, R(T_0))$ » au seuil de signification 5%

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.2 Test du χ^2 sur les distributions de décisions $D(t)$ (Comparaison des distributions de décisions entre les deux modèles)

5.5.2.1 Test général du χ^2 sur les décisions ($D(t)$)

Hypothèses du Test

Hypothèse H_0 : « Il n'y a pas de différence significative dans les choix des décisions $D(t)$ prises dans le modèle de Chorn et dans le modèle ajusté par le risque $R(t)$ »

Contre

Hypothèse H₁ : « Le risque géopolitique R(t) influence significativement les décisions D(t) prises dans le modèle original et dans le modèle ajusté par le risque » au seuil de signification de 5%

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.2.2 Test du Chi² au moment critique T₀ de (D(T₀))

Hypothèses du test

Hypothèse H₀ : « Il n'y a pas de différence significative dans les choix de décisions D(T₀) prises au niveau des deux modèles »

Contre

Hypothèse H₁ : « Le risque géopolitique R(T₀) modifie significativement les décisions D(T₀) » au seuil de signification 5%

les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.3 – Tests de Student unilatéraux gauche : Impact de R(t) sur expansion

5.5.3.1 Test général

Hypothèses du test

Hypothèse H₀ : « L'ajout du risque R(t) au modèle de Chorn et Shokhor ne diminue pas significativement la probabilité d'expansion à long terme des projets pétroliers »

Contre

Hypothèse H₁ : « L'ajout de R(t) au modèle de Chorn et Shokhor diminue significativement la probabilité d'expansion à long terme des projets pétroliers » au seuil de signification 5%.

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.3.2 Test au temps optimal T₀ : Impact de R(T₀) sur l'expansion

Hypothèses du test

Hypothèse H₀ : « L'ajout du risque R(T₀) au modèle de Chorn et Shokhor ne diminue pas significativement la probabilité d'expansion à long terme des projets pétroliers »

Contre

Hypothèse H₁ : « L'ajout de R(T₀) au modèle de Chorn et Shokhor diminue significativement la probabilité d'expansion à long terme des projets pétroliers » au seuil de signification 5%.

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.4 Tests de Student unilatéraux gauche : impact de $R(t)$ sur les décisions d'abandon des projets pétroliers

5.5.4.1 Test général

Hypothèses du test

Hypothèse H_0 : « L'ajout du risque $R(t)$ au modèle de Chorn et Shokhor n'augmente pas significativement la probabilité d'abandon des projets pétroliers »

Contre

Hypothèse H_1 : « L'ajout de $R(t)$ au modèle de Chorn et Shokhor augmente significativement la probabilité d'expansion à long terme des projets pétroliers » au seuil de signification 5%.

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.4.2 Test au temps optimal T_0 : Impact de $R(T_0)$ sur les décisions d'abandon

Hypothèses du test

Hypothèse H_0 : « L'ajout du risque $R(T_0)$ au modèle de Chorn et Shokhor n'augmente pas significativement la probabilité d'abandon des projets pétroliers »

Contre

Hypothèse H_1 : « L'ajout de $R(T_0)$ au modèle de Chorn et Shokhor augmente significativement la probabilité d'abandon des projets pétroliers » au seuil de signification 5%.

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.5 Tests de Student unilatéraux droits sur l'effet de l'amélioration de l'information

5.5.5.1 Test général sur l'effet de l'amélioration de l'information

Hypothèses du test

Hypothèse H_0 : « La réduction de l'asymétrie n'augmente pas significativement la valeur de l'option d'attendre $V(t, R(t))$ »

Contre

Hypothèse H_1 : « La réduction de l'asymétrie augmente significativement la valeur

de » au seuil l'option d'attendre $V(t,R(t))$ de signification 5%

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

5.5.5.2 Test au moment critique T_0

Hypothèses du test

Hypothèse H_0 : « La réduction de l'asymétrie n'augmente pas significativement la valeur de $V(T_0, R(T_0))$ »

Contre

Hypothèse H_1 : « L'amélioration de l'information augmente significativement la valeur de $V(T_0, R(T_0))$ » au seuil de signification 5%

Les résultats sont consignés dans le tableau 24 ci-dessous

Tableau 14 : Récapitulatif des 10 tests statistiques

Test	Type de Test	Hypothèse H_0	Hypothèse H_1	Statistique de test	p-value	Décision
1	Student apparié ($V(t, R(t))$)	Pas de différence significative dans $V(t, R(t))$	L'ajout de $R(t)$ augmente $V(t,R(t))$	$t = 8.45$	< 0.0001	Rejeter H_0
2	Student apparié ($V(T_0, R(T_0))$)	Pas de différence significative dans $V(T_0, R(T_0))$	L'ajout de $R(t)$ augmente $V(T_0, R(T_0))$	$t = 5.88$	< 0.0001	Rejeter H_0
3	Chi ² ($D(t)$ avec/sans $R(t)$)	Pas de différence dans les choix de décision	$R(t)$ modifie significativement les décisions	$\chi^2 = 6.29$	< 0.05	Rejeter H_0
4	Chi ² ($D(T_0)$ avec/sans $R(t)$)	Pas de différence dans $D(T_0)$	$R(t)$ modifie $D(T_0)$	$\chi^2 = 4.73$	< 0.05	Rejeter H_0
5	Student unilatéral gauche : $R(t)$ Probabilité(Expansion I t)	$R(t)$ ne réduit pas la probabilité d'expansion	$R(t)$ réduit la probabilité d'expansion	$t = -12.50$	< 0.0001	Rejeter H_0
6	Student unilatéral gauche : $(P(\text{expansion} T_0))$	Le risque géopolitique ne réduit $P(\text{expansion à } T_0)$	Le risque géopolitique ne réduit pas $P(\text{expansion à } T_0)$	$t = -7.32$	< 0.0001	Rejeter H_0
7	Student unilatéral droit ($P(\text{abandon} t \text{ long terme})$)	Le risque géopolitique n'augmente	Le risque géopolitique augmente	$t = 6.18$	< 0.0001	Rejeter H_0

		pas P(abandon à long terme)	P(abandon à long terme)			
8	Student unilatéral droit ($P(\text{abandon} \text{To})$)	Le risque géopolitique n'augmente pas $P(\text{abandon àTo})$	Le risque géopolitique augmente $P(\text{abandon à To})$	$t = 4.95$	< 0.0001	Rejeter H_0
9	Student unilatéral droit : Réduction de l'asymétrie $V(t,$ $R(t))$	Réduction asymétrie n'augmente pas $V(t, R(t))$	Réduction asymétrie augmente $V(t, R(t))$	$t=4.18$	< 0.0001	Rejeter H_0
10	Student unilatéral droit : Réduction de l'asymétrie $V(\text{To}, R(\text{To}))$	Réduction asymétrie n'augmente pas $V(\text{To}, R(\text{To}))$	Réduction asymétrie augmente $V(t, R(\text{To}))$	$t=3.05$	< 0.05	Rejeter H_0

5.5.6 Conclusions sur les tests d'hypothèses

Test 1 – Student apparié ($V(t, R(t))$)

L'ajout du risque géopolitique modifie significativement la valeur de l'option d'attendre. Cela valide l'hypothèse que l'incertitude stratégique valorise davantage la flexibilité dans les projets d'investissement sous condition

Test 2 – Student apparié ($V(\text{To}, R(\text{To}))$)

Au moment optimal To , où le risque est minimal, l'ajout de $R(t)$ continue d'avoir un effet sur la valeur de l'option. Cela démontre que même à faible incertitude, l'option d'attendre reste stratégiquement valorisée par la présence d'un risque potentiel.

Test 3 – Chi^2 ($D(t)$ avec/sans $R(t)$)

La distribution des décisions stratégiques change significativement avec l'introduction de $R(t)$. Le risque géopolitique complexifie la décision, augmentant la probabilité d'abandon et réduisant l'expansion.

Test 4 – Chi² (D(T₀) avec/sans R(t))

Même à l'instant T₀, l'ajout du risque modifie les décisions prises. Cela montre que la simple perception de l'instabilité géopolitique influence les choix même lorsqu'elle est supposée minimale.

Test 5 – Student unilatéral gauche (R(t) réduit P (expansion | t))

Le risque géopolitique réduit significativement la probabilité d'expansion des projets à long terme. Cela confirme que l'incertitude pousse les entreprises à différer ou annuler les investissements risqués.

Test 6 – Student unilatéral gauche (R(t) réduit P (expansion | T₀))

Même au moment optimal T₀, la probabilité d'expansion reste affectée négativement par le risque. Cela souligne une prudence persistante des investisseurs, même lorsque les conditions paraissent favorables.

Test 7 – Student unilatéral droit (R(t) augmente P (abandon | t long terme))

L'introduction du risque géopolitique augmente la probabilité d'abandon des projets à long terme. Ce comportement est cohérent avec une aversion accrue au risque dans des contextes géopolitiques instables.

Test 8 – Student unilatéral droit (R(t) augmente P (abandon | T₀))

Au moment T₀ également, le risque perçu est suffisant pour rendre l'abandon plus probable, ce qui remet en cause l'optimalité systématique de l'expansion à T₀.

Test 9 – Student unilatéral droit (Réduction de l'asymétrie → V(t, R(t)))

La réduction de l'asymétrie d'information améliore significativement la valeur de l'option d'attendre, car elle réduit l'incertitude économique sur les flux attendus et les coûts, ce qui renforce la prise de décision éclairée.

Test 10 – Student unilatéral droit (Réduction de l'asymétrie → V (T₀, R(T₀)))

Même en T₀, l'amélioration de l'information a un effet positif sur la valorisation de l'option, justifiant les investissements en intelligence stratégique et veille concurrentielle.

5.6 Interprétation des résultats issus des différents tests

L'ensemble des tests et simulations réalisés dans les sections précédentes a permis de mieux cerner l'impact du risque géopolitique R(t) sur la valeur stratégique de l'option d'attendre dans les projets d'investissement pétroliers. Les résultats mettent en évidence plusieurs enseignements fondamentaux, que nous présentons ci-dessous.

5.6.1 Confirmation de l'effet négatif du risque géopolitique

Les tests montrent de manière constante que l'intégration du risque $R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At}$ réduit la valeur de l'option d'attendre par rapport au cas sans risque.

- En l'absence de risque ($R=0$), l'option conserve sa valeur maximale.
- Dès que le risque devient faible mais non nul, une érosion progressive de la valeur est observée.
- Pour des niveaux moyens ou élevés, la valeur de l'option chute brutalement.

Cette tendance confirme que le risque géopolitique agit comme une prime de risque implicite qui déprécie les gains stratégiques liés à l'attente.

5.6.2 Détection des seuils critiques R_c

Les résultats des simulations montrent l'existence d'un seuil critique R_c du risque géopolitique au-delà duquel la valeur de l'option décroît rapidement :

- Pour $R < R_c$, l'option conserve une valeur positive et l'attente reste justifiable.
- Pour $R = R_c$ la valeur atteint un maximum transitoire.
- Pour $R > R_c$, la valeur s'effondre et l'attente perd toute justification économique.

Ce comportement confirme que le risque géopolitique induit une **zone** optimale d'attente, au-delà de laquelle la flexibilité perd son intérêt.

5.6.3 Effets de la vitesse de dissipation A

Les tests montrent également que la vitesse de dissipation du risque A joue un rôle d'amortisseur :

- **A élevé** alors le risque se résorbe rapidement, la valeur de l'option est préservée plus longtemps.
- **A faible** alors le risque persiste, et l'érosion de la valeur de l'option est accélérée.

Ainsi, la dynamique temporelle du risque est aussi importante que son intensité initiale.

5.6.4 Rôle des chocs exogènes $K(t)$

Les tests intégrant des chocs exogènes liés à des tensions diplomatiques ou à des interventions internationales montrent que :

- Un choc modéré n'annule pas complètement la valeur de l'option si A est élevé.
- Des chocs intenses et persistants combinés à un A faible détruisent rapidement la valeur stratégique de l'attente.

Cela souligne que la stabilité géopolitique est un facteur clé pour la préservation de la flexibilité des investissements pétroliers.

5.6.5 Sensibilité croisée avec volatilité et asymétries d'information

Les résultats de la section 3.4 montrent que l'effet du risque géopolitique est renforcé lorsqu'il interagit avec :

- **Une forte volatilité des prix du pétrole**, qui accentue l'incertitude et fragilise l'option.
- **Une asymétrie d'information élevée**, qui réduit la capacité de l'investisseur à anticiper correctement l'évolution du risque.

Inversement, une meilleure diffusion de l'information et une gestion de la volatilité par des instruments financiers permettent de préserver partiellement la valeur de l'option.

5.6.6 Interprétation globale et implications stratégiques

La synthèse des résultats permet de dégager trois enseignements majeurs :

- La valeur stratégique de l'attente est fortement conditionnée par le niveau et la dynamique du risque géopolitique. Attendre n'est bénéfique que si le risque reste sous contrôle et si sa dissipation est suffisamment rapide.
- Il existe une fenêtre temporelle optimale d'attente. Au-delà de cette fenêtre, les bénéfices potentiels de la flexibilité sont annihilés par le risque croissant.
- La gestion active du risque devient essentielle. L'investisseur doit recourir à des stratégies de couverture (diversification, assurances, clauses contractuelles, instruments financiers) pour prolonger la valeur de l'option d'attendre

6. Discussion

6.1 Apports du modèle étendu

L'extension du modèle de valorisation de l'option d'attendre en intégrant une fonction dynamique du risque géopolitique $R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At}$ constitue un apport méthodologique et pratique majeur. Contrairement au modèle classique de Dixit et Pindyck (1994) ou à l'approche initiale de Chorn et Shokhor (2006), l'introduction de $R(t)$ permet de prendre en compte l'instabilité politique et ses fluctuations dans la valorisation stratégique des projets pétroliers.

Les résultats obtenus dans les sections précédentes confirment que cette extension enrichit l'analyse en trois dimensions essentielles : la dynamique du risque,

l'identification de seuils critiques, et la meilleure compréhension du rôle de la dissipation et des chocs exogènes.

6.1.1 Prise en compte explicite du risque géopolitique

Le premier apport du modèle étendu est d'avoir intégré de manière formelle et dynamique le risque géopolitique dans la formule de valorisation.

- Dans les modèles traditionnels, le risque est capturé indirectement par une prime uniforme ou un ajustement du taux d'actualisation.
- Ici, le risque est une variable endogène évoluant dans le temps selon un processus de dissipation A et soumis à des chocs exogènes $K(t)$.

Cela permet de reproduire plus fidèlement la réalité des projets pétroliers, où l'instabilité politique est variable, incertaine et persistante.

6.1.2 Identification de seuils critiques de rentabilité

L'un des résultats les plus importants du modèle est la mise en évidence de seuils critiques R_c :

- Pour $R < R_c$, l'option d'attendre reste rentable et conserve une valeur stratégique.
- À $R = R_c$, l'option atteint une valeur maximale avant de décroître.
- Pour $R > R_c$ la valeur de l'option chute brutalement, rendant l'attente non justifiable.

Cet apport est décisif car il donne aux décideurs un outil opérationnel pour déterminer quand l'attente est encore optimale et quand elle devient contre-productive.

6.1.3 Importance de la dynamique de dissipation du risque

L'introduction du paramètre A permet de mesurer la vitesse à laquelle le risque se dissipe dans le temps. Les simulations montrent que :

- Un A élevé atténue l'impact du risque et prolonge la valeur stratégique de l'attente.
- Un A faible aggrave la perte de valeur, même si R_0 est modéré.

Ce résultat constitue un apport méthodologique majeur, car il souligne que l'évaluation des projets doit tenir compte non seulement du niveau initial du risque, mais aussi de sa dynamique temporelle.

6.1.4 Rôle des chocs exogènes dans l'instabilité

En ajoutant $K(t)$, le modèle intègre la possibilité de perturbations soudaines (guerres, sanctions économiques, interventions diplomatiques). Les résultats confirment que :

- Des chocs limités ne détruisent pas totalement la valeur de l'option si le risque se dissipe rapidement (A élevé).
- Des chocs intenses et persistants combinés à une faible dissipation (A faible) anéantissent rapidement l'intérêt d'attendre.

Cet apport reflète mieux la réalité du secteur pétrolier, où les décisions d'investissement sont fortement sensibles aux événements exogènes imprévisibles.

6.1.5 Comparaison avec le modèle sans risque

Les simulations ont montré que :

- Dans le modèle sans risque, la valeur de l'option est toujours maximale et croît avec l'incertitude du marché.
- Dans le modèle étendu, la valeur de l'option est systématiquement plus faible, et sa rentabilité dépend du niveau et de la dynamique du risque.

Ainsi, l'intégration de $R(t)$ apporte une vision plus réaliste : elle rappelle que l'attente n'est pas toujours un choix optimal et que l'incertitude géopolitique réduit l'efficacité stratégique des options réelles.

6.1.6 Apports stratégiques pour la décision d'investissement

Enfin, le modèle étendu permet de relier directement les résultats théoriques aux décisions managériales :

- Identifier la fenêtre temporelle optimale où attendre est justifié.
- Déterminer si des stratégies de couverture (assurances, diversification géographique, contrats de stabilisation) peuvent préserver la valeur de l'option.
- Arbitrer entre une stratégie d'attente (si $R < R_c$) et une stratégie d'investissement immédiat (si $R \geq R_c$).

En résumé, le modèle étendu apporte une meilleure prise en compte de la réalité géopolitique, une détection des seuils critiques, une mesure explicite de la vitesse de dissipation du risque, et une prise en compte des chocs exogènes. Ces apports théoriques et empiriques renforcent la pertinence des options réelles comme outil de gestion stratégique des investissements pétroliers.

6.2 Limites méthodologiques et théoriques

Malgré les apports importants du modèle étendu, il convient de reconnaître plusieurs limites, à la fois sur le plan méthodologique et sur le plan théorique. Ces limites n'invalident pas les résultats, mais elles permettent de situer leur portée et de préciser les pistes d'amélioration possibles pour de futures recherches.

6.2.1 Limites liées à la modélisation du risque géopolitique

L'intégration de la fonction $R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At}$ représente un progrès majeur, mais plusieurs simplifications subsistent :

- **Forme fonctionnelle imposée** : le risque est représenté par une loi exponentielle décroissante, ce qui suppose une dissipation régulière dans le temps. Or, dans la réalité, les crises géopolitiques connaissent des phases de montée, de stabilisation et de reprise.
- **Nature des chocs exogènes $K(t)$** : ceux-ci sont modélisés comme une fonction additive, alors que dans les faits ils peuvent être non linéaires, cumulatifs ou déclencheurs de ruptures structurelles.
- **Endogénéité non prise en compte** : le risque est considéré comme exogène au projet, alors que les choix stratégiques des firmes (alliances, partenariats, lobbying) peuvent aussi influencer son évolution.

6.2.2 Limites liées aux hypothèses financières

Certaines hypothèses du modèle financier sous-jacent demeurent restrictives :

- **Marchés parfaits** : la valorisation repose sur des hypothèses d'efficience et d'absence de frictions, alors que les marchés pétroliers sont caractérisés par des distorsions, des cartels et des régulations.
- **Volatilité constante** : la volatilité du prix du pétrole est supposée stable dans certains scénarios, alors qu'elle est en réalité stochastique et soumise à des sauts brusques.
- **Taux d'actualisation** : l'ajustement par $(r+R(t))$ simplifie la prime de risque, mais il néglige la possibilité d'une structure dynamique des taux d'intérêt et des primes de risque différenciées selon la maturité.

6.2.3 Limites empiriques et de calibration

La validité opérationnelle du modèle dépend fortement de la qualité des données :

- **Difficulté de mesurer R_0 et $K(t)$** : le risque géopolitique est un concept multidimensionnel difficile à quantifier (indices de Caldara & Iacoviello, ratings souverains, événements extrêmes, etc.).
- **Disponibilité des données** : dans certains pays producteurs de pétrole, les informations fiables sur la stabilité politique et économique sont limitées.
- **Calibrage des paramètres** : la vitesse de dissipation A reste difficile à estimer empiriquement, ce qui limite la précision des simulations.

6.2.4 Limites théoriques liées aux options réelles

Enfin, certaines limites tiennent à la nature même de la théorie des options réelles :

- **Complexité computationnelle** : plus le modèle intègre des sources d'incertitude (risque géopolitique, volatilité stochastique, asymétries d'information), plus la résolution devient complexe, nécessitant des méthodes numériques avancées.
- **Vision unidimensionnelle de l'incertitude** : le modèle se focalise sur le risque géopolitique, mais dans la réalité, d'autres risques interagissent simultanément (environnemental, technologique, réglementaire).
- **Décision binaire attendre/investir** : le modèle ne prend pas en compte d'autres stratégies intermédiaires (investissement partiel, alliances stratégiques, diversification sectorielle).

6.2.5 Discussion critique

Ces limites invitent à une lecture prudente des résultats :

- Le modèle étendu améliore la compréhension du rôle du risque géopolitique, mais il ne capture pas l'ensemble des dimensions stratégiques.
- L'approche reste théorique et stylisée, ce qui limite son applicabilité directe.
- Toutefois, en révélant des seuils critiques R_c et en mettant en évidence l'importance de la vitesse de dissipation A , il ouvre la voie à des outils pratiques pour la décision d'investissement.

En résumé, cette section souligne que le modèle étendu constitue une avancée importante, mais qu'il doit être complété par des méthodes empiriques robustes, des approches pluridimensionnelles du risque, et des extensions permettant d'intégrer davantage de stratégies d'adaptation.

7. Conclusion et recommandations

7.1 Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire était d'analyser l'impact du risque géopolitique sur la valeur de l'option d'attendre dans les investissements pétroliers, en mobilisant une extension du modèle de Chorn et Shokhor (2006). L'introduction d'une fonction dynamique du risque, $R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At}$, a permis de rendre compte à la fois de la persistance du risque initial, des chocs exogènes liés aux tensions internationales et de la vitesse de dissipation de ce risque.

Les principaux résultats peuvent être résumés comme suit :

- **En absence de risque ($R=0$)**, l'option d'attendre atteint sa valeur maximale.
- **Avec un risque faible ou modéré**, l'option conserve une valeur significative, mais elle présente un seuil critique R_c au-delà duquel sa valeur décroît rapidement.
- **À risque élevé**, la valeur de l'option tend vers zéro, rendant l'attente inutile.
- **La vitesse de dissipation du risque (A)** joue un rôle central : un A élevé permet d'amortir les effets négatifs du risque, tandis qu'un A faible amplifie la destruction de valeur.

- **Les chocs exogènes (K(t))** aggravent l'impact négatif, surtout lorsque la dissipation est lente.
- Comparée au modèle déterministe sans risque, l'intégration du risque géopolitique conduit à une réduction systématique de la valeur stratégique de l'attente, mais elle introduit également des éléments plus réalistes dans l'évaluation des décisions d'investissement.

Ainsi, le modèle étendu permet de mieux comprendre les conditions sous lesquelles l'attente constitue une stratégie optimale et celles où elle perd toute pertinence.

7.2 Implications théoriques

Cette recherche contribue à la littérature sur les options réelles en proposant un cadre analytique qui :

- Intègre explicitement le risque géopolitique dans la valorisation des projets pétroliers.
- Identifie des seuils critiques de risque où l'option d'attendre devient non rentable.
- Montre l'importance de paramètres dynamiques comme la vitesse de dissipation et les chocs exogènes.

Elle démontre ainsi que les modèles traditionnels, souvent statiques, peuvent être enrichis par une dimension politique et géopolitique, renforçant leur pertinence pour les secteurs fortement exposés à l'instabilité internationale.

7.3 Implications pratiques

Sur le plan opérationnel, les résultats offrent plusieurs enseignements aux décideurs et investisseurs :

- **Gestion active du risque** : L'évaluation d'un projet pétrolier ne peut pas se limiter aux seules variables financières et de marché, mais doit intégrer des indicateurs de stabilité politique et géopolitique.
- **Timing de l'investissement** : La valeur stratégique de l'attente dépend de la trajectoire du risque. Identifier le moment optimal T_0 où le risque est minimal est crucial pour maximiser la rentabilité.
- **Outils de couverture** : Les stratégies de diversification géographique, les assurances (MIGA, expropriation) et les clauses contractuelles spécifiques apparaissent comme des leviers pour préserver la valeur de l'option.
- **Analyse comparative** : Les résultats incitent les entreprises à comparer systématiquement les scénarios avec et sans prise en compte du risque géopolitique, afin de ne pas surévaluer la valeur de l'attente.

7.4 Recommandations pour les décideurs publics et privés

Pour les entreprises pétrolières

- Renforcer les capacités d'analyse prospective géopolitique afin d'anticiper les chocs $K(t)$.
- Développer des stratégies d'investissement flexibles, permettant d'ajuster rapidement la décision d'attendre ou d'investir selon l'évolution du risque.
- Recourir à des instruments financiers de couverture contre les risques politiques et macroéconomiques.

Pour les États producteurs de pétrole

- Mettre en place des mécanismes de stabilisation politique et fiscale pour rassurer les investisseurs.
- Encourager la transparence institutionnelle et la prévisibilité réglementaire, afin de réduire la prime de risque.

Pour les institutions financières internationales

- Proposer des garanties spécifiques (par exemple MIGA) adaptées aux contextes de forte instabilité.
- Soutenir les projets stratégiques par des financements conditionnés à des standards de gouvernance et de réduction des risques.

7.5 Perspectives de recherche

Enfin, ce travail ouvre plusieurs pistes d'approfondissement :

- **Extension multirisques** : intégrer simultanément les risques environnementaux, technologiques et réglementaires aux côtés du risque géopolitique.
- **Volatilité stochastique** : modéliser des prix pétroliers avec volatilité variable et chocs brusques, en interaction avec $R(t)$.
- **Données empiriques** : tester et calibrer le modèle sur des séries réelles d'événements géopolitiques et de prix du pétrole.
- **Approches computationnelles** : utiliser des méthodes numériques avancées (Monte Carlo, réseaux de neurones, équations différentielles stochastiques) pour résoudre des cas plus complexes.

.Bibliographie

Akerlof, G. A. (1970). The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *Quarterly Journal of Economics*, 84(3), 488–500.

Amram, M., & Kulatilaka, N. (1999). *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Harvard Business School Press.

Bekaert, G., Harvey, C. R., & Ng, A. (2005). Market integration and contagion. *The Journal of Business*, 78(1), 39–69.

Bernanke, B. S. (1980). Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment. *The Quarterly Journal of Economics*, 98(1), 85–106.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.

Bowman, E. H., & Hurry, D. (1993). Strategy through the option lens: An integrated view of resource investments and the incremental-choice process. *Academy of Management Review*, 18(4), 760–782.

Brealey, R. A., Myers, S. C., & Allen, F. (2020). *Principles of Corporate Finance* (13e éd.). McGraw-Hill Education.

Caldara, D., & Iacoviello, M. (2019). Measuring Geopolitical Risk. Board of Governors of the Federal Reserve System. Working Paper Series. <https://doi.org/10.17016/FEDS.2018.057>

Caldara, D., & Iacoviello, M. (2022). Measuring Geopolitical Risk. *American Economic Review*, 112(4), 1194–1225. <https://doi.org/10.1257/aer.20191823>

Chorn, L. G., & Shokhor, A. V. (2006). Real Options Applied to the Oil and Gas Industry: Modeling and Valuation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 51(3–4), 203–223.

Desogus, L., Grosso, D., Bompert, E., & Lo Rosso, S. (2023). Geopolitical risk and its effects on commodity markets: A review. *Energy Reports*, 9, 10811–10830.

Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton University Press.

Ford, D., & Sobek, S. (2005). Adapting real options to new product development by modeling the second Toyota paradox. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 52(2), 175–185.

Fourt, R., & Rodney, B. (1991). International Oil Investment: Assessing Political Risk. *Energy Policy*, 19(2), 118–124.

- Friedl, G. (2000). Valuing real options with stochastic investment costs. *Journal of Financial Economics*, 56(1), 95–120.
- Gabriel, J. Power, Tandja, C. D. M., Bastien, J., & Grégoire, P. (2014). Geopolitical risk and oil investment: An empirical study. *Energy Economics*, 46, 373–384.
- Harvey, C. R., Bekaert, G., & Ng, A. (2005). Market integration and contagion. *The Journal of Business*, 78(1), 39–69.
- International Energy Agency (IEA). (2009–2024). *World Energy Outlook Reports*. Consulté sur <https://www.iea.org/>
- Jacquet, D. (2001). La gestion de l'incertitude dans les projets pétroliers : application des options réelles. *Revue française de gestion*, 27(135), 99–117.
- Kester, W. C. (1984). Today's options for tomorrow's growth. *Harvard Business Review*, 62(2), 153–160.
- Lensink, R., & Sterken, E. (2000). Asymmetry and real options in investment decisions. *Journal of Policy Modeling*, 22(5), 581–598.
- Liu, J., Ma, F., Tang, Y., & Zhang, Y. (2019). Geopolitical risk, oil price, and stock returns: Evidence from global oil-exporting countries. *Energy Economics*, 81, 90–103.
- Malik, M., Nordin, N., Zakaria, A., & Sirun, N. (2021). Geopolitical Risks and Their Impact on Oil Prices and Stock Returns. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(8), 370.
- Marlo, P. (2003). *Real Options in Petroleum Exploration: Decision Analysis and Risk Management*. Oxford Institute for Energy Studies.
- McDonald, R., & Siegel, D. (1986). The Value of Waiting to Invest. *The Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707–727. <https://doi.org/10.2307/1884175>
- McGrath, R. G., Ferrier, W. J., & Mendelow, A. L. (2004). Real options as engines of choice and heterogeneity. *Academy of Management Review*, 29(1), 86–101.
- Milne, A., & Whalley, A. E. (1996). Time to build, option value and investment decisions. *Journal of Financial Economics*, 44(3), 331–350.
- Mintz, J., & Huang, H. (1990). Tax Policy and Investment Behavior: Evidence from Canadian Firms. *Economica*, 57(227), 335–352.
- Power, G. J., Tandja, C. D. M., Bastien, J., & Grégoire, P. (2014). Geopolitical risk and oil investments: Empirical evidence. *Energy Economics*, 46, 373–384.
- PRS Group. (2009–2024). *Political Risk Services Reports*. Consulté sur <https://www.prsgroup.com/>

Transparency International. (2009–2024). Corruption Perceptions Index Reports. Consulté sur <https://www.transparency.org/>

Triantis, A. J. (2003). Real options and corporate risk management. *Journal of Applied Corporate Finance*, 15(2), 64–78.

Trigeorgis, L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications*. Praeger.

Wood Mackenzie. (2024). Oil & Gas Financial Reports. Consulté sur <https://www.woodmac.com/>

World Bank. (2009–2024). Worldwide Governance Indicators. Consulté sur <https://databank.worldbank.org/source/worldwide-governance-indicators>

ANNEXE F : Modélisation du risque géopolitique

Nous allons utiliser un modèle de convergence déterministe avec forçage exogène

qui constitue un cadre déterministe robuste pour modéliser la trajectoire ajustée d'un indicateur financier (tel que le risque géopolitique) sous l'effet de facteurs exogènes, offrant ainsi un outil d'aide à la décision dans l'évaluation des options réelles. Ce type de modèle met en valeur la rigueur mathématique (« équation de convergence » traduit l'idée d'une dynamique vers un équilibre), l'ancrage financier (« forçage exogène » renvoie aux chocs ou tendances externes comme le risque géopolitique) et l'utilité stratégique (suivi de la trajectoire d'un indicateur clé pour la décision d'investissement)

Première étape : Description du modèle d'inconnue $R(t)$

A propos des variables $R(t)$ désigne le niveau du risque géopolitique à l'instant t ; $T(t)$ le niveau des tensions politiques ou événements géopolitiques à l'instant t ; $E(t)$ le niveau d'incertitude économique ou d'événements économiques ayant un impact sur le risque géopolitique à l'instant t ; et enfin par $I(t)$ le niveau d'intervention internationale (diplomatique, militaire, économique).

Au sujet des paramètres, nous allons désigner par α le coefficient positif représentant l'impact des tensions politiques sur l'augmentation du risque, par β le coefficient positif représentant l'effet de la dissipation du risque dans le temps; par μ_0 coefficient positif représentant l'impact multiplicatif de l'incertitude économique sur le risque géopolitique et enfin par le coefficient positif représentant l'impact des interventions internationales sur la réduction du risque géopolitiques.

Le modèle de convergence déterministe avec forçage exogène d'inconnue $R(t)$ est

$$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha \cdot T(t) - \beta \cdot R(t) - \mu_0 \cdot R(t) \cdot E(t) + \pi \cdot I(t) : (F_1)$$

$$:\frac{dR(t)}{dt} + (\beta + \mu_0 \cdot E(t))R(t) = \alpha \cdot T(t) + \pi \cdot I(t) : (F_2)$$

Avec $A = (\beta + \mu_0 \cdot E(t))$ et $f(t) = \alpha \cdot T(t) + \pi \cdot I(t)$

Deuxième étape : Résolution de (F_1)

a) Loi du mouvement sans forçage) associée à (F_1) :

La loi du mouvement sans forçage associée au modèle (F_1) est

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = - [\beta + \mu_0 \cdot E(t)] \cdot R(t) : (F_3)$$

Elle représente la dynamique intrinsèque de dissipation ou d'accumulation du risque en l'absence de chocs externes, fournissant un scénario de référence indispensable pour isoler l'impact des perturbations exogènes sur les décisions d'investissement.

Désignons par $R_h(t)$ la solution transitoire de la loi du mouvement sans forçage (solution homogène). Cette loi transitoire est une équation à variable séparable. En l'intégrant membre à membre (F3) nous obtenons

$$\ln R_h(t) = \int_0^t (-\beta - \mu_0 \cdot E(s)) ds + \ln R_0 \text{ avec } \ln \text{ désignant la fonction logarithme népérien, } R_0 \text{ le niveau initial du risque et } R_h(t) \text{ la composante transitoire de (F3).}$$

Ce qui revient encore à écrire $\ln R_h(t) - \ln R_0 = -\beta \cdot t - \mu_0 \int_0^t E(s) ds$ soit

$$\ln \frac{R_h(t)}{R_0} = -(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds) \quad (F_4)$$

En composant chaque membre de (F4) par la fonction exponentielle on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{R_h(t)}{R_0} = e^{-(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} \text{ ou encore } R_h(t) = R_0 \cdot e^{-(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)}$$

La composante transitoire est donc $R_h(t) = R_0 \cdot e^{-(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} : (F_5)$

avec R_0 désignant le niveau initial du risque géopolitique

b) Recherche d'une composante stationnaire forcée (solution spécifique au régime permanent)

Elle représente la trajectoire d'équilibre imposée par le forçage exogène

Désignons par $R_p(t)$ une solution spécifique au régime permanent

Pour déterminer $R_p(t)$, nous utiliserons la méthode de variation des constantes. Pour cela nous poserons $R_p(t) = K(t) \cdot e^{-(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} : (F_6)$

Avec $K(t)$ une variable que nous essayerons de déterminer dans la suite de la résolution.

La fonction $R_p(t)$ est solution de l'équation (F1) c'est-à-dire que

$$R'_p(t) = -(\beta + \mu_0 \cdot E(t)) \cdot R_p(t) + \alpha \cdot T(t) + \pi \cdot I(t) : (F_7)$$

La dérivée de $R_p(t)$ à partir de (F6) donne le résultat suivant :

$$R'_p(t) = K'(t) \cdot e^{-(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} + (-\beta - \mu_0 E(t)) \cdot K(t) \cdot e^{-(\beta \cdot t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} \quad (F_8)$$

En remplaçant (F6) et (F8) dans (F7) on obtient l'égalité suivante

$$K'(t).e^{-(\beta.t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} + (-\beta - \mu_0 E(t)).K(t).e^{-(\beta.t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)}$$

$$= -(\beta + \mu_0 .E(t)). K(t).e^{-(\beta.t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} + \alpha.T(t) + \pi.I(t)$$

Ce qui donne $K'(t).e^{-(\beta.t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} = \alpha.T(t) + \pi.I(t)$ ou encore

$$K'(t) = (\alpha.T(t) + \pi I(t)).e^{(\beta.t + \mu_0 \int_0^t E(s) ds)} \quad (F_9)$$

b-1) Calcul d'une intégrale de forçage K(t)

A partir de (F₉) nous avons $K(t) = \int_0^t (\alpha.T(s) + \pi I(s)).e^{(\beta.s + \mu_0 \int_0^s E(u) du)} ds : (F_{10})$

En l'absence d'hypothèses spécifiques sur T(t) (niveau des tensions politiques ou événements géopolitiques à l'instant t) ; sur I(t) (niveau d'intervention internationale diplomatique, militaire, économique) et sur E(t) (niveau d'incertitude économique ou d'événements économiques ayant un impact sur le risque géopolitique à l'instant t), cette intégrale ne possède pas de solution explicite directe. Toutefois, en intégration numérique ou symbolique, elle peut être exprimée sous forme de fonction intégrale

Dans le but de trouver une solution explicite K(t), nous allons Choisir des modèles appropriés pour T(t), I(t) et E(t) facilitant ainsi le calcul de K(t)

b-1-1) Définition et Modélisation de T(t)

T(t) représente le niveau des tensions politiques ou les événements géopolitiques à un instant t. Elle est modélisée par une fonction sigmoïde définie par

$$T(t) = \frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(t-t_0)}} \quad (F_{11})$$

-Dans cette formule T_{max} est le niveau maximal des tensions; γ contrôle la rapidité de l'évolution, et t_0 représente le moment la tension atteint 50% de sa valeur maximale

Ce modèle sigmoïde de T(t) présente deux phases distinctes :

Une montée progressive : Au début, les tensions augmentent lentement, ce qui traduit une montée graduelle des influences politiques.

Une saturation : La fonction tend vers une valeur maximale, T_{max} , indiquant que les tensions se stabilisent après avoir atteint un certain seuil.

En un mot une fonction sigmoïde permet de représenter une montée graduelle des tensions, suivie d'une stabilisation. Cette forme sigmoïde permet de modéliser de manière réaliste un phénomène (crises géopolitiques par exemple) où les tensions ne croissent pas indéfiniment mais atteignent une limite, ce qui est courant dans les processus géopolitiques où les ressources ou les réactions institutionnelles limitent l'escalade des tensions.

b-1-2) Modèle pour I(t) (Intervention internationale)

Les interventions internationales sont souvent réactives aux tensions géopolitiques. Un modèle exponentiel avec retard est donc pertinent et a pour forme d'approximation

$$I(t) = I_0 e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) : (F_{12})$$

Dans cette formule I_0 représente l'intensité initiale de l'intervention; λ est la rapidité de dissipation de l'intervention; τ est le délai après lequel l'intervention commence, et $H(t-\tau)$ est la fonction de Heaviside (valant 0 pour $t < \tau$, et 1 pour $t \geq \tau$)

Ce modèle permet de modéliser bien le fait que les interventions internationales n'interviennent qu'après un certain seuil de tension. Puis de représenter la dissipation des interventions après un certain temps

b-1-3) Modèle de E(t)

Nous allons supposer que le niveau d'incertitude économique ou d'évènements économiques ayant un impact sur le risque géopolitique à l'instant t est constante dans le temps pour des besoins de implication du calcul de $K(t)$

$$E(t) = E_0 \text{ avec } E_0 \text{ une constante}$$

b -1-4) calculs de K (t)

$$K(t) = \int_0^t (\alpha \cdot T(s) + \pi I(s)) \cdot e^{(\beta \cdot s + \mu_0 \cdot \int_0^s E(u) du)} ds \quad (F_{10})$$

Remplaçons les formes approximations de $T(t)$, $I(t)$ et $E(t)$ dans l'équation (F₁₀). Il s'en suit $\int_0^s E(u) du = \int_0^s E_0 du$

$$= E_0 \cdot s \text{ et par suite}$$

$$K(t) = \int_0^t \left[\alpha \cdot \frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(s-t_0)}} + \pi \cdot I_0 e^{-\lambda(s-\tau)} \cdot H(s-\tau) \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds \quad ===$$

$$= \int_0^t \left[\alpha \cdot \frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(s-t_0)}} \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds + \int_0^t \left[\pi \cdot I_0 e^{-\lambda(s-\tau)} \cdot H(s-\tau) \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds : \quad (F_{13})$$

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t) \text{ avec}$$

$$K_1(t) = \int_0^t \left[\alpha \cdot \frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(s-t_0)}} \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds \quad (F_{14}) \text{ et}$$

$$K_2(t) = \int_0^t \left[\pi \cdot I_0 e^{-\lambda(s-\tau)} \cdot H(s-\tau) \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds : \quad (F_{15})$$

Calculons d'abord et de façon explicite $K_2(t)$

$$K_2(t) = \int_0^t \left[\pi \cdot I_0 e^{-\lambda(s-\tau)} \cdot H(s-\tau) \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds \text{ d'après (F}_{15})$$

$$= \int_0^t \left[\pi \cdot I_0 e^{-\lambda(s-\tau)} \cdot H(s-\tau) \right] e^{(\beta + \mu_0 E_0)s} \cdot ds$$

Puisque $H(u-\tau)=0$ pour $u<\tau$, l'intégrale $K_2(t)$ donnée par (F15) devient :

$$\begin{aligned} K_2(t) &= \int_{\tau}^t \pi \cdot I_0 e^{-\lambda(s-\tau)+s(\beta+\mu_0 E_0)} du \\ &= \int_{\tau}^t \pi \cdot I_0 e^{\lambda(\tau)+s(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} du \\ &= \pi \cdot I_0 \cdot \int_{\tau}^t e^{\lambda(\tau)+s(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} ds \\ &= \pi \cdot I_0 e^{\lambda\tau} \int_{\tau}^t e^{s(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} ds \end{aligned}$$

Une intégrale indéfinie de $e^{s(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)}$ est $\frac{1}{(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} e^{s(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)}$ et alors
 $K_2(t) = \frac{\pi \cdot I_0 e^{\lambda\tau}}{(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} [e^{t(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} - e^{\tau(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)}]$ pour tout $t \geq \tau$ (F16)

$K_2(t) = 0$ pour tout $t < \tau$

Calculons ensuite $K_1(t)$

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_0^t \left[\alpha \cdot \frac{T_{max}}{1+e^{-\gamma(s-t_0)}} \right] e^{(\beta+\mu_0 E_0)s} \cdot ds \\ &= \alpha T_{max} \cdot \int_0^t \left[\frac{e^{(\beta+\mu_0 E_0)s}}{1+e^{-\gamma(s-t_0)}} \right] \cdot ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \alpha T_{max} \int_0^t \left[\frac{e^{(\beta+\mu_0 E_0)s} e^{-\gamma t_0}}{(1+e^{-\gamma(s-t_0)})e^{-\gamma t_0}} \right] \cdot ds \\ &= \alpha T_{max} \int_0^t \left[\frac{e^{(\beta+\mu_0 E_0)s} e^{-\gamma t_0}}{e^{-\gamma t_0} + e^{-\gamma s}} \right] \cdot ds \end{aligned}$$

$$K_1(t) = \alpha T_{max} \int_0^t \left[e^{(\beta+\mu_0 E_0)s} \frac{e^{-\gamma t_0}}{e^{-\gamma t_0} + e^{-\gamma s}} \right] \cdot ds : (F17) \text{ et}$$

$K_1(t)$ n'a pas de solution élémentaire ou analytique simple mais on peut chercher une approximation analytique ou numériquement de cette intégrale avec des paramètres spécifiques et visualiser l'évolution de cette intégrale pour différents valeurs du temps t .

b-2) Composante stationnaire forcée $R_p(t)$

Remplaçons les expressions de $K_1(t)$ issue de (F17) et $K_2(t)$ issue de (F16) dans (F13), on a

$$K(t) = \frac{\pi \cdot I_0 e^{\lambda\tau}}{(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} [e^{t(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)} - e^{\tau(-\lambda+\beta+\mu_0 E_0)}] + \alpha T_{max} \int_0^t \left[e^{(\beta+\mu_0 E_0)u} \frac{e^{-\gamma t_0}}{e^{-\gamma t_0} + e^{-\gamma u}} \right] \cdot du$$

Nous allons noter l'égalité précédente (F18)

Puis nous allons remplacer (F₁₈) et E(s)=E_o dans (F₆) : R_p(t)= K(t). e^{-(β+μoEo)t} pour trouver l'expression finale de la composante stationnaire forcée

D'où R_p(t)= K(t). e^{-(β+μoEo)t} avec

$$K(t) = \frac{\pi \cdot I_o e^{\lambda \tau}}{(-\lambda + \beta + \mu o E_o)} \left[e^{t \cdot (-\lambda + \beta + \mu o E_o)} - e^{\tau \cdot (-\lambda + \beta + \mu o E_o)} \right] + \alpha T_{max} \int_0^t \left[e^{(\beta + \mu o E_o)u} \frac{e^{-\gamma t_0}}{e^{-\gamma t_0} + e^{-\gamma u}} \right] \cdot du \quad (F_{19})$$

c) modèle de convergence déterministe avec forçage exogène

Le modèle de convergence déterministe avec forçage exogène est donné par R(t)

$$R(t) = R_h(t) + R_p(t)$$

Or R_h(t)= R_o.e^{-(β.t+ μo ∫₀^t E(s)ds)} et R_p(t)= K(t).e^{-(β.t+ μo ∫₀^t E(s)ds)} avec E(s)=E_o.
Donc (β.t + μo ∫₀^t E(s)ds)=(β + μoEo)t et par suite

$$R(t) = R_o e^{-(\beta + \mu o E_o)t} + K(t) \cdot e^{-(\beta + \mu o E_o)t}$$

$$R(t) = (R_o + K(t)) \cdot e^{-(\beta + \mu o E_o)t} : (F_{20}) \quad \text{ou encore}$$

$$R(t) = (R_o + K(t)) \cdot e^{-At} \quad (F_{21}) \quad \text{or}$$

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t) \quad \text{donc}$$

$$R(t) = (R_o + K_1(t) + K_2(t)) \cdot e^{-(\beta + \mu o E_o)t} \quad \text{avec}$$

$$K_1(t) = \int_0^t \left[\alpha \cdot \frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(u-t_0)}} \right] e^{(\beta + \mu o E_o)u} \cdot du \quad \text{et}$$

$$K_2(t) = \int_0^t \left[\pi \cdot I_o e^{-\lambda(u-\tau)} \cdot H(u-\tau) \right] e^{(\beta + \mu o E_o)u} \cdot du$$

En somme nous pouvons dire que

$$R(t) = (R_o + K(t)) \cdot e^{-(\beta + \mu o E_o)t} \quad \text{avec}$$

$$K(t) = \frac{\pi \cdot I_o e^{\lambda \tau}}{(-\lambda + \beta + \mu o E_o)} \left[e^{t \cdot (-\lambda + \beta + \mu o E_o)} - e^{\tau \cdot (-\lambda + \beta + \mu o E_o)} \right] + \alpha T_{max} \int_0^t \left[e^{(\beta + \mu o E_o)u} \frac{e^{-\gamma t_0}}{e^{-\gamma t_0} + e^{-\gamma u}} \right] \cdot du$$

(F₂₁)

Troisième étape : Interprétation

$$K_1(t)$$

La fonction K₁(t)= ∫₀^t [α. $\frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(u-t_0)}}$] e^{(β+μoEo)u}. du, avec T(u) = $\frac{T_{max}}{1 + e^{-\gamma(u-t_0)}}$ (T(s) sous la forme sigmoïde) est une expression intégrale amplifiée qui mesure l'effet cumulatif des tensions politiques actualisées dans le temps. Cette formulation permet de capturer l'évolution dynamique et non linéaire du risque géopolitique.

$K_2(t)$

$K_2(t) = \int_0^t [\pi \cdot I_0 e^{-\lambda(u-\tau)} \cdot H(u - \tau)] e^{(\beta + \mu_0 E_0)u} \cdot du$ représente la contribution des interventions internationales (diplomatiques, militaires ou économiques) à la réduction du risque. Son interprétation permet d'évaluer comment ces interventions, via leur effet stabilisateur, modifient la dynamique de $R(t)$ et, en particulier, la valeur de l'option d'attendre dans la prise de décision stratégique.

Quatrième étape : Détermination du temps optimal T_0 où le risque est minimum.

Pour justifier que $R(t)$ atteint un minimum pour $t = T_0$, il faut montrer que ce point satisfait à la fois une condition nécessaire et une condition suffisante pour un minimum local.

a) Condition nécessaire : $\frac{dR(t)}{dt} = 0$

Au point $t = T_0$, la condition d'optimalité est que la dérivée première de $R(t)$ par rapport au temps s'annule c'est à dire que $\frac{dR(t)}{dt} = 0$. Cela signifie qu'il n'y a ni accroissement, ni décroissance instantanée du risque à cet instant. Ainsi dans l'équation (F₁) qui est la suivante

$$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha T(t) - \beta R(t) - \mu_0 R(t) E_0 + \pi I(t),$$

Posons $\frac{dR(t)}{dt} = 0$ à $t = T_0$ dans (F₁) conduit à l'égalité

$\alpha T(T_0) + \pi I(T_0) = (\beta + \mu_0 E_0) R(T_0)$: (F₂₂) qui exprime un équilibre entre les mécanismes d'augmentation et de diminution du risque.

b) Condition suffisante $\frac{d^2R(t)}{dt^2} > 0$

Pour qu'un point où $\frac{dR(t)}{dt} = 0$ soit un minimum (et non un maximum ou un point d'inflexion), il faut que la dérivée seconde de $R(t)$ soit positive à cet instant T_0 . Soit

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} > 0$$

Cela signifie que la courbure de $R(t)$ est concave vers le haut en $t = T_0$, assurant que le risque est au niveau le plus bas localement.

On part de l'équation (F₁) du risque donnée par :

$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha T(t) - A \cdot R(t) + \pi I(t)$ avec $A = \beta + \mu_0 E_0$ constante donc puis on dérive membre à membre cette équation (F₁). Nous obtenons le modèle suivant :

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = \alpha T'(t) - A \cdot R'(t) + \pi I'(t) : (F_{23})$$

Or, en particulier, au point critique $t = T_0$ où $R(t)$ est extrémum, on a $R'(T_0) = 0$. Donc en remplaçant $R'(t)$ par 0 dans: (F₂₃), on obtient l'égalité suivante

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = \alpha \cdot T'(T_0) + \pi \cdot I'(T_0) : (F_{24})$$

Montrons enfin que $\frac{d^2R(t)}{dt^2} > 0$

Pour qu'un point critique soit un minimum, il faut que la dérivée seconde y soit strictement positive. Autrement dit, il faut démontrer que :

$$\alpha \cdot T'(T_0) + \pi \cdot I'(T_0) > 0.$$

Pour démontrer cette inégalité, nous allons étudier le sens de variation chacun de ces modèles de T(t) et I(t)

T(t) est une fonction croissante :

En effet dans le modèle, T(t) représente le niveau des tensions politiques qui augmentent (par exemple, de manière sigmoïdale pour atteindre un maximum T_{max}).

On a donc $T'(t) > 0$ pour t dans une certaine plage, et en particulier à $t = T_0$.

En effet $T(t) = \frac{T_{max}}{1+e^{-\gamma(t-t_0)}}$ et $T'(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} \gamma \frac{T_{max}}{1+e^{-\gamma(t-t_0)}} \cdot \frac{1}{1+e^{-\gamma(t-t_0)}}$ et chacun des termes de $T'(t)$ sont strictement positifs donc $T'(t) > 0$

I(t) est une fonction décroissante (après un délai) :

I(t) est modélisée par $I(t) = I_0 e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau)$. Sa dérivée $I'(t)$ est alors négative pour $t > \tau$ (la fonction décroît).

En effet $I'(t) = -\lambda I_0 e^{-\lambda(t-\tau)}$ pour $t > \tau$ et chacun de ces termes est strictement positifs donc $I'(t)$ est strictement négative.

Ainsi, dans l'expression $\alpha \cdot T'(T_0) + \pi \cdot I'(T_0)$: Le terme $\alpha \cdot T'(T_0)$ est positif et le terme $\pi \cdot I'(T_0)$ est négatif.

Pour que la somme soit positive, il faut que la contribution positive de la croissance des tensions l'emporte sur la décroissance de l'intervention, c'est-à-dire que :

$$\alpha \cdot T'(T_0) > |\pi \cdot I'(T_0)| : (F_{25})$$

En réunissant la condition nécessaire et la condition suffisante donnée respectivement par (F₂₄) et (F₂₅) nous obtenons la condition nécessaire et suffisante pour que R(t) admette un minimum. Autrement dit

$$\alpha \cdot T'(T_0) + \pi \cdot I'(T_0) = (\beta + \mu_0 E_0) R(T_0) \text{ sous condition } \alpha \cdot T'(T_0) > |\pi \cdot I'(T_0)| : (F_{26})$$

Annexe G : Équations de Bellman utilisée dans le modèle de Chorn et Shokor(2006)

Première étape : Équation de Bellman donnant la valeur de $V(S_t, X_t, 0)$

L'équation de Bellman, appliquée ici dans le cadre des investissements séquentiels, se présente sous la forme suivante :

$$V(S(t), X(t), 0) = \max_{(S(t)-X(t))} \{ V(S(t), X(t), 0) + \max_{(S(t)-C(t))} [\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r)^i} E_{ii} \{ V(S(t), X(t), t_i) | V(S(t), X(t), t_i-1) > 0, 0 \}] \} \quad (G_1)$$

et $V(S(t), X(t), 0)$ désigne la valeur de l'investissement initial à $t=0$

Deuxième étape : Passage de $V(S(t), X(t), 0)$ à celle de $V(S(t), X(t), t)$

La résolution de l'équation de Bellman (G_1) repose sur une approche récursive, en partant du dernier instant $t=T$ et en remontant jusqu'à $t=0$.

a) Condition terminale ($t=T$)

À l'instant final T , la valeur de l'investissement repose uniquement sur les revenus nets disponibles. On a donc (G_1) qui donne le résultat ci-dessous :

$$V(S(T), X(T), T) = \max [S(T) - X(T), 0] : (G_2)$$

b) Propagation rétrograde de $t=T-1$ à $t=0$

À partir de cette condition terminale (G_2), on procède par itération rétrograde. À chaque étape t , on résout l'équation de Bellman pour déterminer la valeur actuelle $V(S(t), X(t), t)$.

c) Valeur actuelle de l'investissement $V(S(t), X(t), t)$ à l'instant t

Notation simplifiée

Pour faciliter l'écriture, nous introduisons les notations suivantes. $V(t, s)$ désigne la valeur actuelle de l'investissement à l'instant t lorsque l'actif est dans l'état s ; $V(t+1, s')$ la valeur future de l'investissement à l'instant $t+1$ dans l'état s' ; $E\{V(t+1, s') | s, a\}$ l'espérance de la valeur future conditionnée à l'état s et à l'action a ; β le facteur d'actualisation ; $-R(s, a)$ le rendement immédiat associé à l'action a et enfin l'action par la lettre a .

En se servant de la propagation rétrograde et en partant du temps $t=0$ nous aboutissons à l'équation simplifiée de Bellman déduite de l'équation (G_1)

$$V(t, s) = \max_a [R(s, a) + \beta \cdot E\{V(t+1, s') | s, a\}] : (G_3)$$

Cette équation signifie que la valeur optimale $V(t, s)$ est obtenue en choisissant l'action qui maximise la somme de la récompense immédiate et de la valeur espérée future, actualisée.

Troisième étape : Expression explicite de $V(t, s)$ à l'instant t dans l'état s

La décision optimale à chaque instant consiste à choisir entre : Investir immédiatement, attendre pour profiter d'opportunités futures, ou abandonner le projet.

La valeur actuelle de l'investissement s'écrit :

$$V(t, s) = \max [V(t, s, \text{abandonner}), V(t, s, \text{investir}), V(t, s, \text{attendre})] : (G_4)$$

Cas 1 : $a = \text{abandonner}$

Si l'on décide d'abandonner, le projet ne génère plus de valeur future et l'égalité (G_3)

$$\text{conduit à } V(t, s, \text{abandonner}) = 0$$

Cette décision est irréversible et met fin à la chaîne décisionnelle.

Cas 2 : $a = \text{investir}$

Si l'on investit immédiatement : alors l'égalité (G_3)

$$V(t, s, \text{investir}) = S(t) - X(t) : (G_5)$$

Où $S_i(t)$ est la valeur actuelle des recettes et

$X(t)$ le coût d'investissement.

Cette formulation suppose, pour simplifier, l'absence d'incertitude sur les revenus futurs.

Cas 3 : $a = \text{attendre}$

L'option d'attente permet de conserver la flexibilité d'investir ultérieurement. Sa valeur dépend de l'espérance actualisée des meilleures décisions futures :

$$V(t, s, \text{attendre}) = \beta \cdot E \{ V(t+1, s') | s, a \} : (G_6)$$

Où s' est un état futur (ex. : prix du pétrole) et la valeur dépend des décisions optimales à

On obtient ainsi

$$V(t, s) = \max (0, S(t) - X(t), \beta \cdot E \{ V(t+1, s') | s, a \}) : (G_7)$$

Dans cette formule, $S(t)$ représente la valeur actuelle des flux de trésorerie générés par le projet dans l'état s ; $X(t)$ désigne le coût immédiat de l'investissement ou de l'activation de l'option; $V(t+1, s')$ est la valeur future du projet dans un état futur s' , tenant compte des décisions possibles à $(t+1)$ et enfin $E\{V(t+1, s') | s, a\}$ Valeur espérée, calculée à partir des probabilités des états futurs.

En suivant la logique de Chorn et Shokhor (2006), on suppose que la structure de décision reste la même à $t+1$, soit

$$V(t+1, s') = \max(S(t+1, s') - X(t+1), \beta \cdot E\{V(t+2, s'') | s', a'\}) : (G_8)$$

Dans cette formule $S(t) - X(t)$ représente la valeur immédiate si la décision est prise maintenant;

$\beta \cdot E\{V(t+1, s') | s, a\}$ la valeur future anticipée, actualisée et dépendant des états futurs probables.

Ainsi, si l'investisseur choisit d'attendre, la valeur actuelle devient :

$$V(s, attendre) = \beta \cdot E\{V(t+1, s') | s, a\} : (G_9)$$

Annexe (G') : Équations de Bellman ajusté par le risqué R(t)

Première étape : Nouvelle formulation de l'équation de Bellman

Avant d'introduire le niveau R(t) du risque géopolitique, nous allons réécrire l'équation (G₁) sous une forme dynamique en remplaçant l'instant(t +1) par l'instant(t+ Δt)

On a obtient une équation équivalente suivante

$$V(S(t),X(t), t ,R(t)) = \max[0, S(t) -X(t), e^{-r\Delta t}E_t\{V(S(t+\Delta t),X(t+\Delta t) R(t+\Delta t))\}] : (G'_1)$$

Deuxième étape : En présence du risque géopolitique R(t)

En intégrant R(t) dans l'équation (G₇) l'équation de Bellman est alors modifiée comme suit :

$$V(t, s, R(t))= \max [0, e^{-(R(t))} .S(t) - X(t), e^{-R(t)\Delta t}E_t\{V(S(t+\Delta t),X(t+\Delta t) ,R(t+\Delta t))\}] : (G'_2)$$

Dans cette équation, le terme $e^{-(R(t))} .S(t) - X(t)$ représente le gain immédiat ajusté par le risque géopolitique, soit la différence entre les flux projetés et le coût d'investissement, tous deux influencés par le niveau de risque géopolitique .Le facteur exponentiel $e^{-(R(t))}$, qui agit comme un correctif de risque.; le taux total(r+R(t)) traduit quant à lui la valeur temporelle de l'argent ajustée pour tenir compte de l'instabilité politique ou économique.et (Δt) désigne un intervalle de temps qui s'écoule entre l'actif sous-jacent dans l'état s et dans l'état s'.R(E_t demeure l'espérance conditionnelle basée sur l'information disponible à la date(t). et enfin le terme, $e^{-(r+R(t))\Delta t}E_t\{V(S(t+\Delta t),X(t+\Delta t) , R(t+\Delta t))\}$ représente la valeur actualisée nette attendue des flux futurs, en tenant compte à la fois du temps et de l'incertitude géopolitique

Annexe H : Modélisation de l'option d'attendre dans le modèle de Chorn et Shokhor (2006)

Première étape : Équation de base pour l'évaluation des options réelles

L'équation de base pour l'évaluation des options réelles repose sur la logique absolue de la théorie des options financières, adaptée au contexte des décisions d'investissement réelles.

$$V = \max [(S-X)_t, 0] - C : (H_1)$$

Où :

- V : valeur de l'option d'attendre ;
- S : valeur actuelle des revenus nets futurs de l'investissement ;
- X : valeur actuelle des dépenses en capital associées à l'investissement ;
- C : coût de création de l'option.

Deuxième étape : Formule explicite pour la valeur de l'option d'attendre V(t)

La valeur explicite de l'option d'attendre donnée ci-dessous découle de l'équation de base (H₁) précédemment présentée et de la définition originelle de la valeur de l'option d'attendre à savoir : la valeur de l'option d'attendre peut être obtenue par la différence entre la valeur de l'investissement si l'on attend et la valeur obtenue en investissant immédiatement :. Formellement, cette valeur est donnée par :

$$V(t) = \max [V(s, \text{attendre}) - V(s, \text{investir immédiat}), 0] : (H_2)$$

Dans cette formule V(t) désigne la valeur de l'option d'attendre à l'instant t,

$$V(s, \text{attendre}) = \beta \cdot E \{V(t+1, s')\} : (H_3) \text{ et } V(s, \text{investir immédiat}) = S(t) - X(t) : (H_4)$$

En remplaçant (H₃) et (H₄) dans (H₂) on obtient l'équation suivant

$$V(t) = \max [\beta \cdot E \{V(t+1, s')\} - (S(t) - X(t)), 0] : (H_5)$$

Dans le modèle de Chorn et Shokhor, l'espérance $E \{V(t+1, s')\}$ doit capturer non seulement la valeur actuelle de l'investissement immédiat, mais aussi la valeur des options d'investissement futur.

Troisième étape : Décomposition de la formule

a) Espérance mathématique :

L'espérance $E \{V(t+1, s') | s, a\}$ est obtenue par intégration sur les états futurs s' , pondérés par leurs probabilités :

$$E \{V(t+1, s') | s, a\} = \int_{s'} V(t+1, s') \cdot P(s'|s) ds' : (H_6)$$

Avec $V(t+1, s') = \max [S(t+1, s') - X(t+1, s'), \beta \cdot E\{V(t+2, s'') | s', a'\}] : (H_7)$

On introduit une structure récursive typiquement utilisée dans la programmation dynamique.

a.1) Modélisation de la dynamique des prix : Mouvement brownien géométrique (GBM)

Le prix du pétrole est modélisé comme un processus stochastique GBM, défini par :

$$dP(t) = \mu P(t) dt + \sigma P(t) dW(t) : (H_8)$$

L'intégration de cette équation différentielle stochastique (H₈) donne la forme logarithmique suivante, issue du lemme d'Itô :

$$\ln(P(t)) = \ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) : (H_9)$$

Justification de la formule :(H₉)

Le mouvement brownien géométrique (GBM) est le processus stochastique souvent utilisé pour modéliser l'évolution des prix des actifs financiers (y compris le pétrole). La dynamique du prix P_t suit l'équation différentielle stochastique (H₈) c'est à dire :

$$dP(t) = \mu P(t) dt + \sigma P(t) dW(t)$$

Où μ désigne est le taux de croissance moyen du prix; σ est la volatilité du prix; $dW(t)$ est un incrément de mouvement brownien standard (Wiener) et enfin $P(t)$ = prix du pétrole au temps.

Résolution de l'équation différentielle (GBM) (H₈)

$$dP(t) = \mu P(t) dt + \sigma P(t) dW_t \quad \text{entraîne} \quad \frac{dP(t)}{P(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) : (H_{10})$$

Intégrons cette équation différentielle stochastique : (H₁₀) membre à membre sur l'intervalle $[0, y]$. Il s'en suit :

$$\int_0^y \frac{dP(t)}{P(t)} = \int_0^y \mu dt + \int_0^y \sigma dW(t) : (H_{11})$$

La solution analytique de cette équation :(H₁₁) est obtenue par l'application du lemme d'Itô : $\ln(P(t)) = \ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) : (H_{12})$

Nous venons ainsi de faire une transformation logarithme du GBM

Justifions que $\ln P(t)$ suit une loi normale

Par Définition $W(t)$ est appelé mouvement brownien standard ou processus de Wiener qui vérifie les propriétés suivantes :

P₁ – $W(0) = 0$ (le processus commence à 0)

P₂ – $W(t)$ a des incréments indépendants : pour $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ sont indépendantes.

P₃ – $W(t) \sim N(0, t)$

P₄ – $W(t+h) - W(t) \sim N(0, h)$ (les incréments sont normalement distribués avec espérance nulle et variance h)

P₅ – $W(t)$ est continu en t presque sûrement (trajectoire continue).

• **Propriété :**

Si X est une variable qui suit une loi normale de moyenne m et de variance v alors pour toutes constantes réelles a et b , la variable $aX + b$ suit une loi normale de moyenne $a.m + b$ et de variance $a^2.v$

Comme $\ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) y$ et σ sont des termes déterministe (considéré comme des constantes dans le calcul de la variance et de l'espérance) et $W(y)$ un terme aléatoire gaussien alors la variable $\ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) y + \sigma W(0)$ suit une loi normale de moyenne $\sigma E(Wy) + \ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) y = \sigma \cdot 0 + \ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) y$

Ce qui est égal à $\ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) y$

Sa variance est $\sigma^2 \cdot v = \sigma^2 t$

Autrement dit la variable $\ln P(t)$ suit la loi $N \left(\left(\ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right), \sigma^2 t \right)$

Ce qui entraîne que le prix $P(t)$ lui-même suit une loi log-normale.

Ce résultat montre que le logarithme du prix suit une loi normale. Par conséquent, le prix lui-même suit une loi log-normale. Cette propriété permet de définir les probabilités de transition conditionnelles entre les états futurs s' et l'état présent s

a-2) Déterminons la loi de probabilité conditionnelle $P(s'|s)$

Désignons par $s = P(t)$ le prix actuel à l'instant ; par $s' = P(t + \Delta t)$ le prix futur à l'instant $t + \Delta t$

Si $\ln P(t)$ est normale, alors $P(t)$ suit une loi log-normale. Dans la modélisation classique (par exemple, dans le cadre du mouvement brownien géométrique), l'évolution du prix peut s'exprimer de la façon suivante :

Modélisation du processus

On cherche la densité conditionnelle de s' sachant s . Cela revient à déterminer la densité de la variable aléatoire $P(t+\Delta t)$

On sait que $\ln \left(\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} \right) = \ln(P(t+\Delta t)) - \ln(P(t))$

Or d'après (H12) on a $\ln(P(t)) = \ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t)$

En remplaçant le réel t par le réel $(t + \Delta t)$ dans l'équation : (H12), on obtient :

$\ln(P(t + \Delta t)) = \ln(P(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t + \Delta t) + \sigma W(t + \Delta t) :: (H13)$

En soustrayant membre à membre les équations (H12) et (H13) on obtient l'équation

$\ln(P(t + \Delta t)) - \ln(P(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)] :: (H14)$

En se servant de la propriété suivante $\ln \left(\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} \right) = \ln(P(t+\Delta t)) - \ln(P(t))$ l'équation : (H14)

devient $\ln \left(\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)] :: (H15)$

Comme les variables $\ln(P(t))$ et $\ln(P(t + \Delta t))$ suivent chacune une loi normale alors d'après les propriétés sur les lois normales $\ln(P(t + \Delta t)) - \ln(P(t))$ suit une loi normale de paramètre En introduisant la moyenne dans cette égalité: (H15) on obtient

$- E \left(\ln \left(\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} \right) \right) = E \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)] \right) :: (H16)$

$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t$ est déterministe et non brownien et on sait que l'espérance mathématique est calculée en considérant le mouvement brownien.

Les deux membres de l'équation (H16) donnent respectivement :

$$E \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)] \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + E \left(\sigma [W(t + \Delta t) - W(t)] \right) \\ = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma [E(W(t + \Delta t)) - E(W(t))]$$

Comme W_t suit une loi normale $N(0, t)$, alors $E(W(t + \Delta t)) = E(w(t)) = 0$ d'où

$$E\left(\ln\left(\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)}\right)\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t : (H_{17})$$

De façon analogue au cas de l'espérance mathématique, on applique la variance à chacun des membres de l'égalité (H15) à nouveau. On obtient les égalités suivantes :

$$V\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]\right) = V(\sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]) \text{ car}$$

$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$ est déterministe, donc une constante du mouvement brownien

$$V(\sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]) = \sigma^2 V(W(t + \Delta t) - W(t))$$

$V(\sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]) = \sigma^2 \Delta t$ car $W(t + \Delta t) - W(t)$ suit $N(0, \Delta t)$ (avec $W(t)$ suit une loi normale $N(0, t)$)

D'après (H14) $\ln(P(t + \Delta t)) - \ln(P(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)]$ et que

$W(t + \Delta t) - W(t)$ suit $N(0, \Delta t)$ ou encore $W(t + \Delta t) - W(t)$ suit $\sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1)$.

Alors, on peut écrire que $W(t + \Delta t) - W(t) = \sqrt{\Delta t} \cdot Z$ car Z suit $N(0, 1)$ (Z est appelé variable centrée réduite)

On écrit la dynamique du logarithme du prix sous la forme

D'où $\ln(P(t + \Delta t)) = \ln(P(t)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z : (H_{18})$ Où

- μ est le taux de croissance (ou drift),

- σ est la volatilité,

- Z est une variable aléatoire normale centrée réduite ($Z \sim N(0, 1)$).

Ainsi, conditionnellement à $P_t = s$ la formule (H18) donne à l'égalité suivante :

D'où $\ln(s') = \ln(s) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z : (H_{19})$

Ce qui montre que $\ln(s')$ conditionné à s suit une loi normale de moyenne

$m = \ln(s) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$ et de variance $V = \sigma^2 \Delta t$ d'après ce qui précède

Densité de $\ln s'$ conditionnée à s

D'après ce qui précède $\ln s'/s$ suit la loi normale $N(\ln(s) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t; \sigma^2\Delta t)$ (H20)

La densité de la variable $\ln s'$, sachant s , est donnée par la formule suivante

$$f_{\ln s'/s}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln s' - \ln s - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) \text{ (distribution de la loi normale de } \ln s' \text{ conditionnée par } s) : (H21) \text{ où } x = \ln s'.$$

Changement de variable : de $\ln s'$ à s'

Pour obtenir la densité de s' conditionné à s , nous procédons à un changement de variable.

On a $x = \ln s'$ et donc $\frac{dx}{ds'} = \frac{1}{s'}$

Par la formule de changement de variable pour les densités, nous obtenons :

$$f_{s'/s}(s') = f_{\ln s'/s}(\ln s') \cdot \frac{1}{s'}$$

a-3) Expression explicite de la densité conditionnelle $P(s'/s)$

En combinant les résultats précédents, on trouve

$$P(s'/s) = \frac{1}{\sigma'\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln s' - \ln s - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right):$$

$$P(s'/s) = \frac{1}{\sigma'\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s'}{s}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right): (H22)$$

a-4) Expression de de l'espérance mathématique $E[V_{t+1}(s')]$

D'après (H6) on a $E\{V(t+1, s') | s, a\} = \int_{s'} V(t+1, s') \cdot P(s'|s) ds'$

En remplaçant la formule (H22) dans l'égalité (H6) on obtient la formule suivante

$$E\{V(t+1, s') | s, a\} = \int_{s'} V(t+1, s') \cdot \frac{1}{\sigma'\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s'}{s}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) ds' (H23)$$

avec $V(t+1, s') = \max [S(t+1, s') - X(t+1, s'), \beta \cdot E\{V(t+2, s'') | s', a'\}] : (H7)$

Annexe (H') : Extension de la valeur de l'option d'attendre au risque R(t)

Première étape : Rappel de la formule de l'option d'attendre de Chorn

$$V(t) = \max [V(s, \text{attendre}) - V(s, \text{investir immédiat}), 0] : (H_2)$$

Dans cette formule $V(t)$ désigne la valeur de l'option d'attendre à l'instant t ,

$$V(s, \text{attendre}) = \beta \cdot E \{V(t+1, s')\} : (H_3) \text{ et } V(s, \text{investir immédiat}) = S(t) - X(t) : (H_4)$$

En remplaçant (H₃) et (H₄) dans (H₂) on obtient l'équation suivant

$$V(t) = \max [\beta \cdot E \{V(t+1, s')\} - (S(t) - X(t)), 0] : (H_5)$$

Dans le modèle de Chorn et Shokhor, l'espérance $E \{V(t+1, s')\}$ doit capturer non seulement la valeur actuelle de l'investissement immédiat, mais aussi la valeur des options d'investissement futur.

Deuxième étape : Décomposition de la formule

a) Espérance mathématique :

L'espérance $E \{V(t+1, s') | s, a\}$ est obtenue par intégration sur les états futurs s' , pondérés par leurs probabilités :

$$E \{V(t+1, s') | s, a\} = \int_{s'} V(t+1, s') \cdot P(s'|s) ds' : (H_6)$$

$$\text{Avec } V(t+1, s') = \max \{S(t+1, s') - X(t+1, s'), \beta \cdot E \{V(t+2, s'') | s', a'\}\} : (H_7)$$

$$E \{V(t+1, s') | s, a\} = \int_{s'} V(t+1, s') \cdot \frac{1}{\sigma' \sigma \sqrt{2\pi \Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s'}{s}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2 \Delta t}\right) ds' : (H_{23})$$

Troisième étape: Rappel du modèle du risqué R(t)

$$R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-(\beta + \mu_0 E_0)t} : (F_{20})$$

$$K(t) = \frac{\pi \cdot 10 e^{\lambda \tau}}{(-\lambda + \beta + \mu_0 E_0)} \left[e^{t \cdot (-\lambda + \beta + \mu_0 E_0)} - e^{\tau \cdot (-\lambda + \beta + \mu_0 E_0)} \right] + \alpha T_{max} \int_0^t \left[e^{(\beta + \mu_0 E_0)u} \frac{e^{-\gamma t_0}}{e^{-\gamma t_0} + e^{-\gamma u}} \right] \cdot du : (F_{21})$$

Quatrième étape : Valeur de l'option d'attendre ajustée par R(t)

Nous allons intégrer le niveau du risque dans la formule (H₂), on obtient donc la valeur de l'option d'attendre sous la forme continue à cause du dynamisme du risque. Ainsi on désigne l'instant immédiat par la lettre t , l'instant suivant sera noté $t + \Delta t$

Nous avons donc la formule suivante :

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} - V(s, \text{investir immédiat}, R(t)), 0] : (H'_1)$$

Dans cette formule $V(t, R(t))$ désigne la valeur de l'option d'attendre à l'instant t influencé par le risque $R(t)$ et $V(s, \text{investir immédiat}, R(t)) = e^{-(R(t))}S(t) - X(t) : (H'_2)$

En remplaçant (H'_2) dans (H'_1) on obtient la formule suivante

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} - (e^{-(R(t))}.S(t) - X(t)), 0] : (H'_3)$$

L'espérance $E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\}$ est obtenue en intégrant toutes les valeurs possibles de l'état futur s' , pondérées par leur probabilité conditionnelle d'occurrence

$$\text{On sait que } E\{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} = \int_{s'} V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) \cdot P(s'|s, R(t+\Delta t)) ds' : (H_6)$$

$V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t))$ est obtenu par un processus récursif typique de la programmation dynamique. À chaque étape, la décision optimale (investir ou attendre) dépend de la valeur maximale entre l'exercice immédiat de l'option et l'espérance actualisée des décisions futures

$$V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) = \max \{e^{-(R(t+\Delta t))}S(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) - X(t+\Delta t, s'), \beta \cdot E\{V(t+2\Delta t, s'', R(t+2\Delta t)) | s', a'\} \} : (H_4)$$

$$E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} = \int_{s'} V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) \cdot P(s'|s+\Delta t) ds' (H'_5)$$

$P(s'/s)$ est influence par le risqué géopolitique via le prix de l'actif sous-jacent

$$\text{avec } P(s'/s, R(t)) = \frac{1}{\sigma' \sigma \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s'}{s}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) : (H_{22}) \text{ dans } (H_4) \text{ on a:}$$

$$E \{V(t+2\Delta t, s'', R(t+2\Delta t)) | s', a'\} = \int_{s''} E\{V(t+2\Delta t, s'', R(t+2\Delta t)) | s', a'\} \cdot \frac{1}{\sigma' \sigma \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s''}{s'}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) ds'' : (H_6')$$

La formule de l'option d'attendre ajustée par le risque est donc

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} - (e^{-(R(t))}.S(t) - X(t)), 0] : (H'_3)$$

$$V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) = \max \{e^{-(R(t+\Delta t))}S(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) - X(t+\Delta t, s'), \beta \cdot E\{V(t+2\Delta t, s'', R(t+2\Delta t)) | s', a'\} \} : (H'_5)$$

$$E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} = \int_{s'} V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) \cdot P(s'|s, R(t+\Delta t)) ds' (H'_5)$$

$P(s'/s)$ est influence par le risqué géopolitique via le prix de l'actif sous-jacent

$$\text{avec } P(s'/s, R(t)) = \frac{1}{\sigma' \sigma \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{[\ln(\frac{s'}{s}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) : (H_{22})$$

Cinquième étape : Valeur maximale de la valeur de l'option d'attendre ajustée par $R(t)$ et détermination du seuil de risque critique

i) Rappels

ii)

La valeur de l'option d'attendre ajustée par le risque est donnée par la formule suivante :

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} - (e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t)), 0] : (H'_3)$$

La formule provient de la logique des options réelles :

- Le premier terme représente la valeur actualisée de l'option dans le futur, corrigée du taux d'actualisation augmenté du risque géopolitique $R(t)$;
- Le second terme $(e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t))$, représente le gain net immédiat d'un investissement (valeur actualisée des flux futurs moins le coût d'investissement);
- Le maximum avec zéro traduit le caractère optionnel : si attendre n'apporte rien, l'investisseur n'exerce pas l'option.

Cette formule montre que le risque $R(t)$ agit par deux canaux :

- **Actualisation majorée** $e^{-(r+R(t))\Delta t}$: plus le risque est fort, plus la valeur future est fortement érodée.
- **Flux nets corrigés du risque** $(e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t))$: le risque réduit directement les cash-flows espérés.

i.2)

À court terme, une hausse modérée de $R(t)$ accroît la valeur de la flexibilité (attendre) ; mais au-delà d'un seuil, l'érosion des flux et l'actualisation majorée l'emportent, faisant baisser la valeur de l'option d'attendre. Cette relation non monotone est cohérente avec la théorie des options réelles appliquée aux projets pétroliers capitalistiques

Nous allons d'abord déterminer le seuil critique du risque R^* pour lequel l'option d'attendre est maximale, donc la valeur de la flexibilité maximale est atteinte. A ce instant l'investisseur, étant rationnel et ne voulant pas perdre, ne peut plus attendre. Le choix qui s'offre à lui lorsque ce seuil est atteint c'est d'investir

ii) **Justifions pourquoi investir dans le futur au lieu d'attendre est avantageux**

Dans le futur, l'investisseur reconsidère la situation après un pas Δt .

Si à l'instant $(t+\Delta t)$ la valeur nette corrigée du risque est positive, alors investir est rationnel, car attendre davantage expose à une dissipation trop lente du risque (si A est faible), ou à des chocs exogènes $K(t)$ pouvant réduire encore la valeur.

Ainsi, même si le futur comporte toujours un risque, il existe un seuil critique R_c au-delà duquel l'attente détruit de la valeur. Dans ce cas, l'investisseur rationnel exerce son option et investit, car l'attente supplémentaire ne génère plus d'avantage stratégique.

D'après ce qui précède nous pouvons remplacer dans la formule de $V(t, R(t))$: (H'_3)

$$[e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t+\Delta t, s', R(t+\Delta t)) | s, a\} \text{ par } e^{-(r+R(t))\Delta t} S(t+\Delta t) - X(t+\Delta t).$$

Donc (H'_3) devient

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} S(t+\Delta t) - X(t+\Delta t) - (e^{-R(t)} S(t) - X(t)), 0] : (H'_7)$$

iii) Justifions le fait que le coût d'investissement $X(t)$ est supposé constant pendant un pas Δt

- **Hypothèse de discrétisation temporelle**
Dans le modèle d'options réelles, le temps est découpé en pas Δt . Sur un pas élémentaire, on fait l'hypothèse que les paramètres financiers et réels (tels que le coût d'investissement $X(t)$) ne subissent pas de variation significative. Cela permet de travailler avec une fonction de transition stable, simplifiant les calculs de valorisation.
- **Nature du coût d'investissement**
Le coût $X(t)$ correspond généralement au capital initial requis pour lancer le projet (ex. construction d'un site pétrolier, achat de machines, installation d'équipements). Ces coûts sont souvent contractualisés à l'avance (contrats d'ingénierie, devis de construction, prix fixés avec les fournisseurs), ce qui les rend rigides sur de courtes périodes.
- **Comparaison avec les flux $S(t)$**
Contrairement aux revenus $S(t)$, qui dépendent du prix du pétrole et donc sont soumis à une forte volatilité et au risque géopolitique, le coût d'investissement est beaucoup plus inertiel : il ne varie que sur des horizons plus longs, en raison de l'inflation, de la fiscalité ou de changements structurels dans les conditions de marché.
- **Justification économique**
Si on autorisait $X(t)$ à fluctuer à chaque pas Δt , l'incertitude serait double : à la fois sur les revenus $S(t)$ et sur le coût. Cela rendrait l'option d'attendre quasiment impossible à valoriser analytiquement. L'hypothèse de constance de $X(t)$ pendant un pas est donc un compromis méthodologique : elle permet de concentrer l'analyse sur l'impact du risque géopolitique $R(t)$ et de la volatilité des flux, tout en restant réaliste puisque dans la pratique, le coût d'investissement est relativement stable sur des périodes courtes (quelques mois à un an).

En résumé :

Le coût d'investissement $X(t)$ est supposé constant pendant un pas Δt car :

- il reflète des engagements contractuels stables,
- il varie beaucoup plus lentement que les revenus $S(t)$,
- et cette hypothèse simplifie le modèle sans perdre en réalisme sur l'horizon court.

iv) Formule de l'option d'attendre (un pas)

Explication

Dans le cadre d'une modélisation en temps discret, la formule dite « à un pas » permet d'évaluer la valeur de l'option d'attendre à partir d'un seul intervalle temporel Δt , en intégrant les scénarios possibles d'évolution de la valeur actualisée des flux futurs. Le mot (un pas) signifie que l'on regarde la valeur actuelle de l'option à partir d'un seul mouvement futur possible (montée ou descente) avant de prendre une décision d'exercer ou d'attendre. Cette formule sert à calculer la valeur théorique de continuer à attendre plutôt que d'investir immédiatement

Formule sur la valeur de l'option d'attendre (un pas)

Nous voulons donc étudier une étape d'attente (attendre Δ puis reconsidérer), la valeur « un-pas ».

La valeur de l'option d'attendre à un pas c'est à dire au temps $(t + \Delta)$ et qui traduit explicitement la dépendance en R s'écrit

$$V_{op}(R) = [e^{-(r+R)\Delta}(e^{-(R_p)} \cdot S_p - X) - (e^{-(R)} \cdot S - X), 0] : (H'8)$$

$$\text{Et posons } f(R) = e^{-(r+R)\Delta}(e^{-(R_p)} \cdot S_p - X) - (e^{-(R)} \cdot S - X) : (H'9)$$

En insérant $(H'9)$ dans $(H'8)$ on obtient la formule de $V(R)$ suivante

$$V_{op}(R) = \max(f(R), 0) : (H'10)$$

Dans cette formule $(H'8)$:

$V_{op}(R)$ désigne la formule de l'option d'attente pour un pas (qui remplace $V(t, R(t))$) et qui exprime la dépendance de cette valeur de l'option d'attendre $V(t, R(t))$ uniquement en fonction du niveau de risque R ;

- $X(t + \Delta) = X$ et $X(t) = X$ (d'après la justification précédente iii) et X désigne le coût immédiat d'investissement (coût à l'instant t);
- $S_p = S(t + \Delta)$ représente la valeur des flux à la prochaine date qui est $(t + \Delta)$;
- $R_p = (t + \Delta)$ qui encore égal à $R e^{-(A\Delta)}$ (il suffit de remplacer le temps t par $(t + \Delta)$ dans l'expression du risque $R(t) = (R_0 + K(t)) \cdot e^{-At}$: (F21)) désigne le
- risque obtenu après un pas de temps $(t + \Delta)$ et on supposera que $K(t + \Delta) = K(t)$
- De plus X désigne le coût immédiat d'investissement (coût à l'instant t),
- $\Delta t = \Delta$ un pas;
- $(e^{-(R_p)} \cdot S_p - X)$ désigne le terme à la prochaine date (terme à $t + \Delta$). Elle représente la valeur nette attendue d'un investissement si l'on décide dans le futur

v) Détermination du seuil critique R_c (condition nécessaire)

En posant $V_{op}(R) = f(R)$ dans la région où l'option a une valeur positive, on a

$$f(R) = e^{-(r+R)\Delta} (e^{-Rp} \cdot Sp - X) - (e^{-R} \cdot S - X); (H'9)$$

Le seuil critique R_c est défini par la condition nécessaire (condition du premier ordre)

$$f'(R) = 0 : (CND)$$

Cette dérivée exprime le point où l'effet marginal du risque sur la valeur de l'option devient nul, c'est-à-dire où la valeur de la flexibilité est maximale

vi) Conditions d'existence du maximum

Deux conditions garantissent qu'un maximum intérieur peut exister :

- (C1) :

$$e^{-Rp} \cdot Sp - X > 0$$

Cette condition entraîne que le projet doit rester rentable dans le futur (sinon attendre n'a aucun intérêt).

Justification : Si la valeur nette attendue d'un investissement si l'on décide dans le futur, $(e^{-Rp} \cdot Sp - X)$, est négative ou nulle alors même dans le futur il ne serait pas rentable d'investir. Cela représente une impasse pour l'investisseur

- (C2) :

$$e^{-(r+R)\Delta} (e^{-Rp} \cdot Sp - X) - (e^{-R} \cdot S - X) > 0 \quad \text{ou encore } f(R) > 0$$

Cette condition entraîne que la valeur d'attendre doit rester strictement positive par rapport à investir immédiatement.

Justification : Autrement dit si on était dans une région où ce terme est nul ou négatif, la fonction $f(R) = e^{-(r+R)\Delta} (e^{-Rp} \cdot Sp - X) - (e^{-R} \cdot S - X)$ serait en fait plate (valeur = 0) et la dérivée n'aurait pas d'intérêt pour trouver un maximum.

Ces conditions définissent la région de continuation (in-the-money) où il est rationnel d'attendre, mais seulement jusqu'au seuil critique R_c . Au-delà, la dérivée devient négative et la valeur de l'option chute.

En résumé la formule $V(t, R(t))$ intègre le risque via actualisation et flux corrigés; et puis investir dans le futur (plutôt qu'attendre indéfiniment) devient optimal car l'option perd sa valeur après un seuil critique R_c . Ce seuil est obtenu par la condition nécessaire $f'(R_c) = 0$ et existe seulement dans la région où (C1) et (C2) sont respectées

vii) Dérivation de $f(R)$ par rapport à R

D'après : (H'10) on a $V_{op}(R) = \max(f(R), 0)$ et comme $f(R) > 0$ (C2) alors

$$Vop(R) = f(R) ; (H'_{11})$$

$$f(R) = e^{-(r+R)\Delta} (e^{-(Rp)} \cdot Sp - X) - (e^{-(R)} \cdot S - X) \text{ d'après : } (H'_{9})$$

En remplaçant $Rp = R e^{-(A\Delta)}$: (H'_{12}) dans : (H'_{9}) on a

$$f(R) = e^{-(r+R)\Delta} (e^{-(R e^{-(A\Delta)})} \cdot Sp - X) - (e^{-(R)} \cdot S - X) : (H'_{13})$$

$$= e^{-(r+R)\Delta} \cdot e^{-(R e^{-(A\Delta)})} \cdot Sp - X e^{-(r+R)\Delta} - e^{-(R)} \cdot S + X$$

$$f(R) = (e^{-(r+R)\Delta - R e^{-(A\Delta)}}) \cdot Sp - X e^{-(r+R)\Delta} - e^{-(R)} \cdot S + X : (H'_{14})$$

Calculons la dérivée de la fonction $f(R)$ en se servant de l'expression (H'_{13})

$$\text{On a : } f'(R) = (-\Delta - e^{-(A\Delta)}) \cdot (e^{-(r+R)\Delta - R e^{-(A\Delta)}}) \cdot Sp + \Delta X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S$$

$$f'(R) = -(\Delta + e^{-A\Delta}) \cdot (e^{-[(r+R)\Delta + R e^{-(A\Delta)}]}) Sp + \Delta X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S : (H'_{15})$$

viii) : Détermination du seuil critique R_c

- **Condition nécessaire : $f'(R) = 0$**

D'après (H'_{18}), $f'(R) = 0$ équivaut à

$$\Delta X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S - (\Delta + e^{-A\Delta}) (e^{-[(r+R)\Delta + R e^{-(A\Delta)}]}) Sp = 0 :$$

$$\Delta X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S = (\Delta + e^{-A\Delta}) (e^{-[(r+R)\Delta + R e^{-(A\Delta)}]}) Sp \quad (H'_{16})$$

Multiplions chacun des membres de l'égalité (H'_{16}) par le terme $e^{(r+R)\Delta}$, nous obtenons

$$(\Delta X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S) e^{(r+R)\Delta} = (\Delta + e^{-A\Delta}) (e^{-[(r+R)\Delta + R e^{-(A\Delta)}]}) Sp e^{(r+R)\Delta}$$

Développons et réduisons cette égalité précédente. Nous obtenons

$$\Delta X + e^{-(R)} \cdot S e^{(r+R)\Delta} = (\Delta + e^{-A\Delta}) Sp (e^{-R} e^{-(A\Delta)}) \text{ ou encore}$$

$$\Delta X + S e^{(r+R)\Delta - R} = (\Delta + e^{-A\Delta}) Sp e^{-R} e^{-(A\Delta)}$$

$$\text{Autrement dit nous avons } \Delta X + S e^{r\Delta + R(1-\Delta)} = (\Delta + e^{-A\Delta}) Sp e^{-R} e^{-(A\Delta)} \quad (H'_{17})$$

Chacun des deux membres de cette égalité est strictement positif comme somme de termes strictement positifs. Donc cette égalité (H'_{17}) a une solution

Alors le seuil critique R_c s'il existe est solution de (H'_{17}) c'est-à-dire

$$\Delta X + S e^{r\Delta + R_c(1-\Delta)} = (\Delta + e^{-A\Delta}) Sp e^{-R_c} e^{-(A\Delta)} \quad (H'_{18})$$

- **Condition suffisante : $f''(R) < 0$**

On sait que

$$f'(R) = -(\Delta + e^{-A\Delta}) \cdot (e^{-[(r+R)\Delta + R]e^{-A\Delta}}) S_p + \Delta X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S : (H'_{15})$$

En dérivant à nouveau la dérivée première, on obtient

$$f''(R) = -(\Delta + e^{-A\Delta}) \cdot (-\Delta + e^{-A\Delta}) \cdot (e^{-[(r+R)\Delta + R]e^{-A\Delta}}) S_p - \Delta^2 X e^{-(r+R)\Delta} - e^{-(R)} \cdot S$$

$$f''(R) = (\Delta + e^{-A\Delta})^2 \cdot (e^{-[(r+R)\Delta + R]e^{-A\Delta}}) S_p - \Delta^2 X e^{-(r+R)\Delta} - e^{-(R)} \cdot S \quad (H'_{19})$$

La condition suffisante est réunie si $f''(R) < 0$ c'est à dire que

$$(\Delta + e^{-A\Delta})^2 \cdot (e^{-[(r+R)\Delta + R]e^{-A\Delta}}) S_p < \Delta^2 X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S : (H'_{20})$$

$$\text{Si } f'(R_c) = 0 \text{ et } (\Delta + e^{-A\Delta})^2 \cdot (e^{-[(r+R_c)\Delta + R_c]e^{-A\Delta}}) S_p < \Delta^2 X e^{-(r+R_c)\Delta} + e^{-(R_c)} \cdot S : (H'_{21})$$

Alors $f''(R_c) < 0$ et R_c est un maximum strict.

Xv) Interprétation de la condition suffisante

$$(\Delta + e^{-A\Delta})^2 \cdot (e^{-[(r+R)\Delta + R]e^{-A\Delta}}) S_p < \Delta^2 X e^{-(r+R)\Delta} + e^{-(R)} \cdot S : (H'_{20})$$

Nous pouvons dire que :

- Le terme à gauche de l'inégalité correspond à la force concave provenant de l'avantage de reporter (la continuation « dans la monnaie »)
- Les deux termes à droite de l'inégalité représentent l'urgent besoin de convertir la flexibilité en valeur (coût d'opportunité et valeur immédiate).
- Lorsque la partie droite domine, la courbure est négative et le point critique est bien un maximum : la flexibilité a un pic et au-delà l'augmentation supplémentaire du risque réduit la valeur.
- Pour que la condition suffisante soit vérifiée il suffit que le seuil critique R_c vérifie la relation suivante

$$(\Delta + e^{-A\Delta})^2 \cdot (e^{-[(r+R_c)\Delta + R_c]e^{-A\Delta}}) S_p < \Delta^2 X e^{-(r+R_c)\Delta} + e^{-(R_c)} \cdot S \quad (H'_{21})$$

Le seuil critique du risque R_c est calculé implicitement par

$$\Delta X + S e^{r\Delta + R_c(1-\Delta)} = (\Delta + e^{-A\Delta}) S p e^{-R_c e^{-A\Delta}} \quad (H'_{21}) \text{ sous la condition}$$

$$(\Delta + e^{-A\Delta})^2 \cdot (e^{-[(r+R_c)\Delta + R_c]e^{-A\Delta}}) S_p < \Delta^2 X e^{-(r+R_c)\Delta} + e^{-(R_c)} \cdot S \quad (H'_{21})$$

c) Formule fermée de R_c pour une décision annuelle $\Delta=1$

Le cas $\Delta=1$ (décision annuelle) se simplifie fortement, car le second terme du membre droit de ((H'_{21})) ne dépend plus de R. Nous obtenons alors une solution explicite :

$$X + S e^r = (1 + e^{-A}) S p e^{-R_c e^{-A}} \quad (H'_{22})$$

$e^{-Rc} e^{-A} = \frac{X + Se^r}{(1 + e^{-A})Sp}$. En composant chaque membre de cette égalité par la fonction logarithme népérien \ln , nous obtenons la relation suivante

$$-Rc e^{-A} = \ln\left(\frac{X + Se^r}{(1 + e^{-A})Sp}\right) \text{ ou encore } -Rc = e^A \ln\left(\frac{X + Se^r}{(1 + e^{-A})Sp}\right)$$

$$\text{D'où } Rc = e^A \ln\left(\frac{(1 + e^{-A})Sp}{X + Se^r}\right) \text{ (H'23)}$$

Remplaçons $\Delta=1$ dans la condition suffisante d'existence du maximum.

$$(\Delta + e^{-A\Delta})^2 (e^{-[(r+Rc)\Delta + Rc e^{-A\Delta}]}) Sp < \Delta^2 X e^{-(r+Rc)\Delta} + e^{-(Rc)}.S: \text{ (H'24)}$$

Nous obtenons

$$(1 + e^{-A})^2 (e^{-[(r+Rc) + Rc e^{-A}]}) Sp < X e^{-(r+Rc)} + e^{-(Rc)}.S \text{ (H'24)}$$

Simplifions chaque membre de notre inégalité par le terme strictement positif $e^{-(Rc)}$, nous obtenons l'inégalité suivante

$$(1 + e^{-A})^2 (e^{-[(r) + Rc e^{-A}]}) .Sp < X e^{-r} + S \text{ (H'25)}$$

Pour interpréter cette condition d'inégalité, nous pouvons dire que :

- Le premier terme situé à gauche correspond à la force concave provenant de l'avantage de reporter (la continuation « dans la monnaie »).
- Les deux termes à droite représentent l'urgent besoin de convertir la flexibilité en valeur (coût d'opportunité et valeur immédiate).
- Lorsque la partie droite domine, la courbure est négative et le point critique est bien un maximum : la flexibilité a un pic et au-delà l'augmentation supplémentaire du risque réduit la valeur.

En synthèse nous avons $Rc = e^A \ln\left(\frac{(1 + e^{-A})Sp}{X + Se^r}\right)$: (H'23) sous condition

$$(1 + e^{-A})^2 (e^{-[(r) + Rc e^{-A}]}) Sp < X e^{-r} + S: \text{ (H'25)}$$

Multiplions chaque de cette inégalité $(1 + e^{-A})^2 (e^{-[(r) + Rc e^{-A}]} Sp < X e^{-r} + S$ par le nombre positif e^r , on obtient l'inégalité suivante

$$(1 + e^{-A})^2 (e^{-Rc e^{-A}}) Sp < X + S e^r : \text{ (H'26)}$$

Comme $(1 + e^{-A})Sp > X + Se^r$ alors $\frac{(1 + e^{-A})Sp}{X + Se^r} > 1$ et $\ln\left(\frac{(1 + e^{-A})Sp}{X + Se^r}\right)$ existe donc.

d) Valeur maximale de l'option d'attendre en Rc (pour $\Delta=1$)

Toujours pour $\Delta=1$, on peut substituer la valeur de Rc dans l'expression

$$f(R) = e^{-(r+R)\Delta} (e^{-R e^{-A\Delta}}).Sp - X - (e^{-R}.S - X) : \text{ (H'16)}$$

Nous avons $f(R_c) = e^{-(r+R_c)\Delta} (e^{-R_c} e^{-(A\Delta)} \cdot S_p - X) - (e^{-R_c} \cdot S - X) : (H'_{26})$

Remplaçons $e^{-R_c} e^{-A} = \frac{X + Se^r}{(1 + e^{-A})S_p}$ dans (H'_{26})

On obtient $f(R_c) = X + e^{-(r+R_c)} \left[\frac{X + Se^r}{(1 + e^{-A})S_p} - X \right] - S \cdot e^{-R_c}$

.dons la valeur maximale de l'option d'attendre est :

$$V_{\max}(R) = X + e^{-(r+R_c)} \left[\frac{X + Se^r}{(1 + e^{-A})S_p} - X \right] - S \cdot e^{-R_c} \text{ avec } R_c = e^A \ln \frac{(1 + e^{-A})S_p}{X + Se^r} : (H'_{27})$$

Cinquième étape : Comportement asymptotique de la valeur d'attendre

$$V(t, R(t)) = \max [e^{-(r+R(t))\Delta t} E \{V(t + \Delta t, s', R(t)) | s, a\} - (e^{-R(t)} \cdot S(t) - X(t)), 0] : (H'_{3})$$

Cas 1 : Δt tend vers les très grandes valeurs (attente très longue)

On observe que $-(r + R(t))\Delta t$ tend vers les très petites valeurs négatives

Le facteur $e^{-(r+R(t))\Delta t}$ tend vers 0 très rapidement,

Donc l'espérance actualisée de la valeur future tend vers 0,

Et par conséquent : $V(t, R(t))$ tend vers $\max [-e^{-R(t)} \cdot S(t) + X(t), 0] : (H'_{28})$

Alors attendre trop longtemps réduit la valeur de l'option à zéro.

Cas 2 : $R(t) \rightarrow +\infty$ (instabilité géopolitique extrême)

Si le risque devient très grand, alors $-(r + R(t))\Delta t$ tend vers les très petites valeurs négatives.

Le facteur $e^{-(r+R(t))\Delta t}$ tend vers 0 très rapidement,

Donc l'espérance actualisée de la valeur future tend vers 0,

$e^{-R(t)} S(t) - X(t)$ tend rapidement vers $-S(t)$

Et par conséquent l'option d'attendre devient inutile car elle est nulle.

Annexe I : Tableaux

Tableau 15 : Tableau statistique des 60 trajectoires stimulées

Tableau statistique des 60 trajectoires stimulées					
Trajectoire Numéro	V(t) sans risque	V(t, R(t)) avec risque	Trajectoire numéro	V(t) sans risque	V(t, R(t)) risque
1	6,4	6,48	8	6,72	8,71
2	5,63	6,92	9	5,24	7,74
3	6,58	5,54	10	6,45	6,23
4	7,63	5,41	11	5,24	7,74
5	5,52	8,42	12	5,24	9,51
6	5,52	9,23	13	6,09	7,15
7	7,7	7,09	14	3,5	9,55
15	3,73	3,27	40	6,04	6,85
16	5,13	8,43	41	6,69	5,08
17	4,58	7,33	42	6,01	6,57
18	6,18	6,75	43	5,66	6,69
19	4,71	7,34	44	5,44	6,0
20	4,11	4,22	45	4,03	6,96
21	7,56	6,87	46	4,94	7,81
22	5,53	7,74	47	5,25	10,03
23	5,88	9,42	48	7,07	7,46
24	4,09	6,42	49	6,21	7,59
25	5,15	5,99	50	3,68	7,09
26	5,93	6,45	51	6,19	4,32
27	4,42	8,57	52	5,34	7,16
28	6,25	7,69	53	4,99	7,29
29	5,08	6,41	54	6,53	10,89
30	5,45	7,97	55	7,04	6,91
31	5,08	7,35	56	6,92	7,65
32	8,02	8,65	57	4,79	7,15
33	5,78	6,15	58	5,43	5,45
34	4,53	6,71	59	6,2	8,91
35	6,79	6,61	60	6,97	8,33
6	4,33				
37	6,05				
38	3,45				
39	4,21				

Tableau 16 : Tableau statistique de 60 trajectoires simulées

Trajectoire	Temps	R(t)	V(t, R(t))	S(t)	X(t)	S(t)-X(t)	Décision
1	0,0	0,0050	4,91	7,95	7,12	0,82	Expansion
2	0,17	0,03	5,02	5,91	5,64	0,27	Ralentissement
3	0,34	0,07	4,91	8,68	5,43	3,25	Expansion
4	0,51	0,10	4,97	5,32	6,98	-1,66	Abandon
5	0,68	0,11	5,38	7,70	6,28	1,42	Expansion
6	0,85	0,13	5,53	9,63	7,21	2,41	Expansion
7	1,02	0,17	5,32	5,81	6,97	-1,16	Abandon
8	1,19	0,17	5,55	6,32	6,42	-0,11	Ralentissement
9	1,36	0,18	5,42	7,12	5,65	1,47	Expansion
10	1,53	0,20	5,27	6,40	4,98	1,41	Expansion
11	1,69	0,20	5,47	5,14	6,05	-0,91	Abandon
12	1,86	0,21	5,72	7,08	7,36	-0,27	Ralentissement
13	2,03	0,22	5,44	5,73	6,71	-0,99	Abandon
14	2,20	0,21	5,73	7,57	5,25	2,31	Expansion
15	2,37	0,22	4,91	5,90	6,67	-0,78	Abandon
16	2,54	0,23	5,63	8,86	6,89	1,97	Expansion
17	2,71	0,23	5,48	6,06	5,62	0,44	Ralentissement
18	2,88	0,25	5,43	6,61	6,65	-0,04	Ralentissement
19	3,05	0,24	5,49	7,98	6,56	1,42	Expansion
20	3,22	0,23	5,06	5,52	5,36	0,17	Ralentissement
21	3,39	0,26	5,47	7,27	6,86	0,41	Ralentissement
22	3,56	0,24	5,56	8,56	7,06	1,51	Expansion
23	3,73	0,24	5,78	5,07	7,58	-2,51	Abandon
24	3,90	0,23	5,35	7,25	7,55	-0,33	Ralentissement
25	4,07	0,23	5,31	7,31	5,12	2,19	Expansion
26	4,24	0,24	5,38	7,94	5,56	2,38	Expansion
27	4,40	0,22	5,63	5,52	7,02	-1,50	Abandon
28	5,58	0,24	5,54	5,42	7,01	-1,60	Abandon
29	4,75	0,22	5,34	7,63	7,01	0,61	Expansion
30	4,92	0,22	5,55	7,36	10,35	-3,00	Abandon
31	5,08	0,22	5,45	7,30	7,07	0,23	Ralentissement
32	5,25	0,24	5,67	7,42	7,64	-0,22	Ralentissement
33	5,42	0,21	5,29	6,18	7,45	-1,27	Abandon
34	5,59	0,20	5,33	7,28	7,51	0,13	Ralentissement
35	5,76	0,21	5,35	7,35	6,19	1,17	Expansion
36	5,93	0,19	5,08	6,14	7,26	-1,11	Abandon
37	6,10	0,20	5,45	9,24	5,73	3,51	Expansion
38	6,67	0,17	5,40	7,57	6,26	1,31	Expansion
39	6,44	0,17	5,35	5,57	6,01	-0,44	ralentissement
40	6,61	0,18	5,32	7,79	6,58	1,20	Expansion

41	6,78	0,18	5,09	5,83	8,81	-2,98	Abandon
42	6,95	0,17	5,26	7,94	4,63	3,31	Expansion
43	7,11	0,17	5,27	8,39	7,19	1,20	Expansion
44	7,28	0,16	5,16	6,01	4,89	1,13	Expansion
45	7,46	0,14	5,26	8,16	6,03	2,13	Expansion
46	7,63	0,15	5,38	7,50	7,59	-0,09	Ralentissement
47	7,80	0,15	5,67	7,99	6,56	1,42	Expansion
48	7,97	0,16	5,35	9,28	5,42	3,85	Expansion
49	8,14	0,15	5,34	6,71	5,78	0,92	Expansion
50	8,31	0,12	5,22	6,10	7,17	-1,08	Abandon
51	8,47	0,14	4,89	5,93	5,77	0,16	Ralentissement
52	8,64	0,13	5,25	6,02	6,72	-0,70	Abandon
53	8,81	0,12	5,25	6,91	6,55	0,36	Ralentissement
54	8,98	0,13	5,75	7,41	5,85	1,56	Expansion
55	9,15	0,13	5,22	7,33	8,64	-1,31	Abandon
56	9,32	0,12	5,31	7,99	7,13	0,86	Expansion
57	9,49	0,10	5,20	7,02	4,47	2,54	Expansion
58	9,66	0,10	4,97	8,74	6,69	2,06	Expansion
59	9,83	0,11	5,44	6,68	5,84	0,84	Expansion
60	10	0,11	5,37	10,26	7,35	2,91	Expansion