

**Modélisation et Prédiction de la volatilité
des fonds indiciels négociés en bourse (ETF)
avec des modèles de type GARCH**

MÉMOIRE DE RECHERCHE
PRÉSENTÉ COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉCONOMIE FINANCIÈRE

Par

Koffi R.V AKOGO

Sous la direction du :

Professeur Li YAN

AUTOMNE 2025

ABSTRACT

Ce document cherche à analyser, comprendre et prédire la volatilité des ETF en situation de crise économique. Les modèles ARCH et GARCH ainsi que leurs variantes asymétriques et de persistance EGARCH, GJR-GARCH et FiGARCH sont utilisés. Pour l'estimation des coefficients de ces modèles en utilisant la méthode de l'estimateur du maximum de vraisemblance, on est arrivé à la conclusion que les résidus de ces modèles sont mieux représentés par la distribution de student. Par ailleurs les modèles EGARCH et GJR-GARCH montrent que les chocs positifs des rendements des ETF étudiés font varier la volatilité beaucoup plus que les chocs négatifs de même amplitude ce qui est contraire à ce que prône la littérature sur ce sujet. L'hypothèse posée dans ce document qui pourrait justifier cette observation est que la nature de l'actif pourrait attirer que des investisseurs avertis qui fondent leurs décisions sur les rendements future plutôt que de se laisser guider par l'émotion dans ce sens que les rendements négatifs ou faibles annonce un retour vers la moyenne historique des rendements appelé théorie de la réversion vers la moyenne Poterba & Summers (1988). Le modèle EGARCH modélise mieux l'actif SPY tandis que le GARCH est efficace pour le DIA et le XLE.

Mots clés : effet de levier, volatilité conditionnelle, GARCH, GED, asymétrie de volatilité.

REMERCIEMENTS

Ce mémoire marque une étape importante dans ma vie de chercheur et c'est à juste titre que je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué à son accomplissement.

Je remercie particulièrement mon directeur de mémoire, Monsieur Li Yan, Professeur à l'Université du Québec en Outaouais (UQO), pour son accompagnement rigoureux, ses conseils précieux et surtout sa patience tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont également au président du jury Monsieur Djerry Charli Tandja Mbianda qui en même temps dirige ce programme de maîtrise en économie financière ainsi qu'aux membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de ce mémoire.

Je ne pourrais terminer sans remercier mon oncle Monsieur Yao Akogo pour tout le soutien qu'il m'a apporté pendant ce parcours.

Enfin, j'exprime toute ma reconnaissance à ma famille et à mes proches pour leur soutien permanent, leur patience et leurs encouragements durant cette période sans bien sûr oublier l'ensemble des enseignants du programme dont les cours m'ont permis d'avoir des acquis pour mener à bien ce travail.

SIGLES ET ABREVIATIONS

SPY : SPDR S&P 500 ETF Trust

DIA : SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust

XLE : Energy Select Sector SPDR Fund

ARCH : Autoregressive conditional heteroskedasticity

GARCH : Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

EGARCH: Exponential GARCH

GJR-GARCH : Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH

GED : Generalized error distribution

ADF : Augmented Dickey-Fuller

ETF : Exchange Traded Fund

AIC : Akaike information criterion

ACF : autocorrelation function

PACF : partial autocorrelation function

ARMA : Autoregressive moving-average model

MAE : Mean absolute error

MSE : Mean squared error

RMSE : Root Mean Squared Error

MSLE : Mean Squared Logarithmic Error

RMSLE : Root Mean Squared Logarithmic Error

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1	INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1.1	Contexte.....	2
1.2	Présentation des ETF.....	2
1.2.1	Les types d'ETF.....	3
1.2.1.1	Les ETF indiciels.....	3
1.2.1.2	Les ETF de titres à revenu fixe.....	3
1.2.1.3	Les ETF de secteurs ou sectoriels.....	4
1.2.1.4	Les ETF de matière première	4
1.2.1.5	Les ETF sur les cryptomonnaies	4
1.2.1.6	Les autres type d'ETF	5
1.2.2	Les formes de gestion des ETF	5
1.2.2.1	La gestion active.....	6
1.2.2.2	La gestion passive	6
1.3	Les fonds mutuels ou ETF ?.....	6
1.4	Impact des crises majeures récentes dans l'histoire de la finance et de l'économie mondiale... 7	
1.4.1	La crise économique de 2008 ou la crise des subprimes.....	7
1.4.2	La crise économique de 2020	8
1.5	Justification de la recherche	9
1.6	Organisation du document	10
Chapitre 2	REVUE DE LA LITTÉRATURE	11
2.1	Introduction	12
2.2	Faits stylisés sur les données financières.....	13
2.2.1	Non normalité des rendements.....	13
2.2.2	La non (ou presque pas) d'autocorrélation des rendements.	14
2.2.3	Effet de levier	15
2.2.4	Cluster de volatilité	15
2.3	Les différentes façons de modéliser la volatilité	15
Chapitre 3	APPROCHE MÉTHODOLOGIQUE	17
3.1	Introduction	18
3.2	Le rendement.....	18
3.3	Le modèle ARMA.....	19

3.4	Modèles de type ARCH/GARCH	19
3.4.1	ARCH	19
3.4.2	GARCH	20
3.4.3	EGARCH	20
3.4.4	GJR-GARCH	21
3.4.5	FIGARCH	21
3.5	Test d'effet ARCH	22
3.5.1	Le test de multiplicateur de Lagrange de Engle	22
3.5.2	Le test de ratio de la variance	22
Chapitre 4	PRESENTATION ET ANALYSE DES DONNEES	23
4.1	Statistique descriptive	24
4.2	Distribution des rendements (jarque – bera)	25
4.3	Analyse des rendements	25
Chapitre 5	PRESENTATION DES RESULTATS	27
5.1	Introduction	28
5.2	Moyenne conditionnelle des rendements avec le modèle ARMA	28
5.2.1	ACF/PACF et AIC des rendements	28
5.2.2	Résultats des estimations des modèles ARMA	32
5.3	Modèles de volatilité de type GARCH	35
5.3.1	Tests d'effet ARCH	36
5.3.2	Estimation des modèles de type GARCH	37
5.3.3	SPY	38
5.3.3.1	Generalize error distribution	38
5.3.3.1.1	GARCH	38
5.3.3.1.2	GJR-GARCH	38
5.3.3.1.3	EGARCH	39
5.3.3.2	Distribution de student	39
5.3.3.2.1	GARCH	39
5.3.3.2.2	GJR-GARCH	39
5.3.3.2.3	EGARCH	40
5.3.3.3	Distribution normale	40
5.3.3.3.1	GARCH	40
5.3.3.3.2	GJR-GARCH	41

5.3.3.3.3	EGARCH	41
5.3.4	DIA.....	42
5.3.4.1	Generalized error distribution	42
5.3.4.1.1	GARCH.....	42
5.3.4.1.2	GJR-GARCH	42
5.3.4.1.3	EGARCH	43
5.3.4.2	Distribution de students	43
5.3.4.2.1	GARCH.....	43
5.3.4.2.2	GJR GARCH.....	43
5.3.4.2.3	EGARCH	44
5.3.4.3	Distribution normale.....	44
5.3.4.3.1	GARCH.....	44
5.3.4.3.2	GJR-GARCH	45
5.3.4.3.3	EGARCH	45
5.3.5	XLE.....	45
5.3.5.1	Generalized error distribution (GED)	45
5.3.5.1.1	GARCH.....	45
5.3.5.1.2	GJR-GARCH	46
5.3.5.1.3	EGARCH	46
5.3.5.2	Distribution de student.....	46
5.3.5.2.1	GARCH.....	46
5.3.5.2.2	GJR-GARCH	47
5.3.5.2.3	EGARCH	47
5.3.5.3	Distribution normale.....	47
5.3.5.3.1	GARCH.....	47
5.3.5.3.2	GJR-GARCH	48
5.3.5.3.3	EGARCH	48
5.4	Résultat des estimations des modèles de type GARCH retenus.....	49
5.4.1	Choix de la distribution de probabilité des modèles	49
5.5	Test d'autocorrélation des résidus des modèles de volatilité.	51
5.6	Discussion sur les modèles estimés	52
5.7	Volatilité réalisée	54
5.8	Prévision de la volatilité	55

5.9	Évaluation de la prévision	55
Chapitre 6	Discussion et conclusion	57

Chapitre 1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

Résumé du chapitre

Ce chapitre se veut introductif et situe tout d'abord le cadre et le contexte de la recherche. Elle définit et présente les ETF et présente également les différentes catégories qui existent et la façon dont ils sont gérés. En outre ce chapitre essaye de répondre à l'utilité de ces ETF par rapport à d'autres actifs que propose le marché financier plus principalement une comparaison avec les actifs qui s'y rapprochent le plus appelés que sont les fonds mutuels.

Ce chapitre aborde dans une pour la suite, le caractère d'attachement aux crises des actifs financiers précisément sur comment les crises récentes ont affecté la volatilité des rendements des ETF. Cette observation clarifie et justifie l'intérêt de la prévision de la volatilité surtout en contexte de crises. Ainsi ce chapitre jette la base de l'objet poursuivie par cette recherche qu'est la modélisation de la volatilité de fonds négociés en bourse appelés ETF.

1.1 Contexte

Le marché financier international de nos jours dispose de plusieurs possibilités en termes d'investissement offrant aux investisseurs une palette de choix. Mis à part les actifs les plus connus comme les actions et obligations, cette recherche s'intéresse particulièrement à la volatilité des fonds négociés en bourse appelé ETF (*Exchange Traded Fund*).

Les ETF ont fait leurs apparitions au Canada et aux États-Unis au début des années 90 et se présentent comme une alternative aux fonds mutuels en raison de leur faible coût de diversification de risque. En 1990 la bourse de Toronto lance le tout premier ETF sous le nom de Toronto 35 Index Participation Fund suivant l'indice TSX 35 index avec pour symbole « TIP » qui actuellement existe toujours sous le nom iShares S&P/TSX 60 Index ETF (XIU). Trois ans plus tard précisément en janvier 1993, STATE STREET GLOBAL ADVISORS lance le SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY) aux USA qui à ce jour reste le fond le plus négocié dans le monde avec un actif net total sous gestion de plus de 500 milliards de dollars.

Depuis 1993, plusieurs fonds ont vu le jour. Nous avons plusieurs formes de ETF, dont ceux qui suivent les indices boursiers (1990), qui suivent le marché de l'immobilier (2000), les obligations (2002), les commodités (2004) comme l'or, les devises (2005), qui suivent les secteurs comme l'énergie, le transport, le divertissement.... Parlant du mode de gestion, il existe également les ETF activement gérés dans le but de battre la performance d'un indice entre autres. Cette recherche s'intéresse uniquement à la volatilité de trois ETF dont deux qui suivent les indices et un qui suit le secteur de l'énergie.

Parlant de la volatilité, la récente crise COVID-19 a eu un impact significatif dans presque tous les secteurs de l'économie et le marché des ETF n'est pas du reste accentuant ainsi l'aversion au risque des investisseurs. Face à une situation à l'instar d'une crise comme la COVID-19, la prévision de la volatilité apparaît comme un enjeu majeur dans la littérature économique et financière. *Shen and Shafiq* (2020) ont dans leurs travaux montré l'importance de la prévision dans la recherche économique.

1.2 Présentation des ETF

Les ETF peuvent être présentés comme des paniers d'actifs financiers constitués d'actions ou obligations qui peuvent permettre à l'investisseur d'investir dans plusieurs actifs seulement avec la détention d'un ETF. De ce fait, investir dans un ETF est comme investir simultanément dans tous les actions ou obligations que constituent le fonds.

Contrairement à l'investissement dans une action où le rendement de l'investisseur dépend uniquement du cours de l'action et des dividendes qui sont le résultat de la performance de l'entreprise, le rendement de l'ETF par contre est la moyenne des rendements des actifs que l'ETF constitue ou encore le prix de l'ETF dépend du prix de tous les actifs qu'il renferme. Bien que les ETF soient avantageux à détenir, comme tout actifs financiers, il est important de connaître les différentes formes, les façons dont ces actifs sont gérés, de quoi sont-ils constitués...etc.

1.2.1 Les types d'ETF

Il existe à travers le monde des milliers d'ETF, mais ces actifs n'ont pas les mêmes caractéristiques et n'ont pas le même mode de gestion. Dans cette partie, nous parleront des types ou des formes d'ETF qui existent sur le marché

1.2.1.1 Les ETF indiciels

Ces ETF sont conçus pour suivre de près la performance des actions faisant parti des indices que suivent ces ETF. Cette forme d'ETF est idéal pour les investisseurs qui sont un peu plus risquophile et qui cherchent en même temps à diversifier leurs investissements. Ces ETF sont plus risqués comparés aux ETF qui sont constitués d'actifs avec des volatilités plus stables comme les obligations contrairement aux actions qui ont un risque plus élevé. Comme exemple de ce groupe d'ETF on peut trouver les ETF SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**) et le SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**) qui suivent respectivement les indices S&P500 et le Dow-Jones Industrial Average DJA.

1.2.1.2 Les ETF de titres à revenu fixe

Comme le nom l'indique, ces ETF sont constitués des actifs à revenus fixe principalement les obligations, les bons du trésor et les autres actifs à revenu fixe. Ils offrent aux investisseurs des rendements moins risqués mais moins rentable à long terme comparé aux ETF indiciels qui offrent en générale des rendement plus élevés à long terme.

1.2.1.3 Les ETF de secteurs ou sectoriels

Cette catégorie d'ETF offre aux investisseurs la possibilité d'investir uniquement dans les secteurs d'activité qui les passionnent. Les ETF de ce groupe sont constitués d'actifs financiers faisant partie d'un même secteur.

Ainsi on peut trouver des ETF constituer uniquement des actions d'entreprises opérant dans un secteur spécifique ou des obligation destinés à financer uniquement certains secteurs ou domaines d'activité.

Nous avons dans ce groupe des ETF qui trackent les domaines comme par exemple le secteur de la santé, technologie, l'énergie, le divertissement, la finance ...etc. comme exemple d'ETF de cette catégorie on peut citer Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**) qui suit le secteur de l'énergie.

1.2.1.4 Les ETF de matière première

Les ETF de matières premières comme leur nom l'indique permettent de suivre le cours des matières première comme l'or ou encore le pétrole par exemple. L'investissement dans un ETF appartenant à cette catégorie dépend de l'intérêt et de la connaissance de l'investisseur sur la matière première en question.

1.2.1.5 Les ETF sur les cryptomonnaies

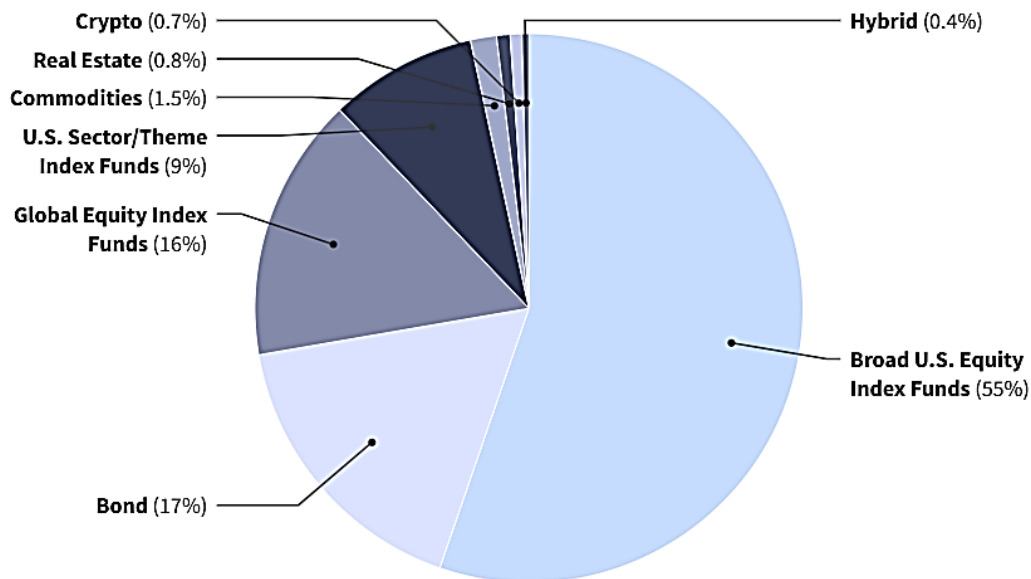
Cette forme d'ETF a rencontré sur son parcours beaucoup de restriction de la part des régulateurs que ça soit au Canada ou aux USA avant d'être finalement accepté comme ETF qui peut être négocié sur le marché. Comme le nom l'indique, les ETF appartenant à cette catégorie suivent le cours des cryptomonnaies. Le Canada est le premier pays a accepté cette forme d'ETF en février 2021 pour le bitcoin et en avril 2021 pour l'Ethereum avant que les USA avec réticence n'en accepte en Octobre 2021 uniquement pour la possibilité de tracker le prix futur du bitcoin et non le prix spot.

Le régulateurs américain Securities and Exchange Commission (SEC) n'a finalement approuvé l'ETF sur le prix spot du bitcoin qu'en janvier 2024. Quelques mois plus tard plus précisément en juillet 2024, la commission approuve également la négociation des ETF suivant le prix spot de l'Ethereum après validation initiale en mai de la même année sur le prix future de l'Ethereum.

1.2.1.6 Les autres type d'ETF

Il en existe d'autre forme d'ETF à savoir les ETF qui suivent des paires de devises par exemple. On peut également citer les ETF inversé qui ont des rendements inversés par rapport aux rendements du sous-jacents et aussi des ETF avec des effets de leviers où les rendements peuvent être 2 allant même parfois 3 fois plus grande que les chocs qui les ont engendrés. Il est à noter également que ces deux derniers ETF sont les plus risqués et demandent plus de connaissances et d'expériences de la part de l'investisseur qui s'y intéresse.

Toutes ces types d'ETF offrent aux investisseurs le choix de s'intéresser aux ETF qui les attirent le plus. A titre d'illustration, le graphique ci-dessous présente la part de marché des ETF sur la bourse de New York selon quelques secteurs ou catégories.



SOURCE : INVESTMENT COMPANY INSTITUTE 1

1.2.2 Les formes de gestion des ETF

En ce qui concerne la façon dont ces ETF sont gérés nous en distinguons deux principales catégories à savoir les ETF activement gérés et ceux gérés de façon passive. Les deux formes de gestion des ETF sont la gestion active et la gestion passive.

1.2.2.1 La gestion active

Les ETF gérés de façon active permettent de battre la performance de l'indice sous-jacent. Ces ETF sont gérés par des professionnels avertis qui prennent les risques particulièrement élevés pour atteindre ces objectifs. Cette catégorie est idéale pour les investisseurs qui sont tolérants au risque et qui ont des attentes de gain plus élevé à court terme. Les frais de gestion et la fréquence de gestion pour cette catégorie sont relativement plus élevés en raison de l'intervention permanente que nécessite leur rentabilité. Bien que l'objectif soit de battre le sous-jacent en termes de rentabilité, il n'est pas impossible que la rentabilité soit en dessous de celui-ci du fait que la rentabilité dépendra du niveau de compétence des professionnels qui sont en charge de sa gestion.

1.2.2.2 La gestion passive

Cette catégorie concerne les ETF conçus pour suivre le plus fidèlement possible les sous-jacents auxquels ils sont adossés. Ces ETF n'ont pas besoin de trop d'intervention des spécialistes pour leur gestion contrairement à la gestion active. Ces ETF sont idéals pour les investisseurs avec une aversion élevée au risque et qui misent sur le long terme. Aussi longtemps que la performance dépend beaucoup plus du sous-jacent que cela ne l'est de l'intervention des professionnels, les frais liés à la gestion sont plus faibles. A long terme les ETF gérés de façon passive sont rentables en raison du fait que les indices qu'ils suivent le sont aussi à long terme.

1.3 Les fonds mutuels ou ETF ?

De façon ramassée la différence entre les fonds mutuels et les ETF n'est pas si grande et les deux se ressemblent sur plusieurs points. Il y a lieu de clarifier ce qui différencie les ETF des fonds mutuels. Il faut retenir qu'en matière de diversification de risque, ces deux actifs sont similaires dans la mesure qu'avec un apport, l'investisseur a la possibilité de bénéficier de la rentabilité de plusieurs actifs et en même temps diversifier ses risques. Les fonds mutuels bien que plus coûteux en raison de la gestion active dont leur gestion nécessite, bénéficient de plus de protection de la part du régulateur relativement aux ETF. Un autre aspect à considérer dans cette comparaison est que les ETF sont négociés à tout moment sur le marché aussi longtemps que le marché est ouvert tout comme les actions alors que les fonds mutuels ne peuvent être achetés qu'une fois par jour c'est-à-dire à la fermeture du marché. Il est également à retenir que les fonds mutuels dans la majorité des cas sont plus rentables en raison de la gestion active dont ils bénéficient.

1.4 Impact des crises majeures récentes dans l'histoire de la finance et de l'économie mondiale

Le but de cette section est d'établir la relation causale entre les crises économiques et la santé du système financier plus précisément sur la volatilité des ETF. La façon la plus simple pour établir cette relation est de faire un petit retour dans l'histoire récente des crises pour voir comment elles ont affecté le marché financier.

1.4.1 La crise économique de 2008 ou la crise des subprimes

Cette crise trouve son origine dans l'octroi de crédit immobilier excessif à taux alléchant aux ménages sans nécessairement tenir compte de leurs capacités de remboursement par les banques américaines dans le début des années 2000. La facilité d'octrois de prêt par les banques soutenu par le gouvernement qui y voit un moyen de dynamiser l'économie à court terme incite les citoyens américains à se procurer des maisons grâce à l'emprunt. Cette situation fait monter la demande sur le marché de l'immobilier très rapidement sans que l'offre de maison ne suive en raison du temps et des ressources nécessaires pour la construction de nouvelles maisons.

En raison de la loi de l'offre et de la demande, la rareté engendrée par la demande excessive fait grimper le prix des maisons. La hausse sans cesse et continu du prix des maisons associé à la possibilité de crédit facile galvanise les américains à s'endetter de plus en plus pour profiter de la spéculation sur le marché de l'immobilier. Ce mécanisme de s'endetter de plus en plus pour profiter de la hausse du prix sur le marché de l'immobilier est appelé *bulle spéculative*.

Face au prix du logement trop coûteux, le gouvernement américain décida de freiner cette bulle en augmentant le taux directeur qui a pour conséquence de renchérir le coût du financement hypothécaire et de décourager l'emprunt. La hausse du taux d'intérêt a aussi causé préjudice aux emprunteurs qui se trouvent dans l'impossibilité de s'acquitter de leurs mensualités ce qui oblige les banques à saisir les maisons afin de les vendre aux enchères ce qui fait renverser la tendance du fait que l'offre devient cette fois ci excessive faisant chuter le prix des maisons.

La chute du prix des maisons n'est pas avantageuse pour les banques en raison de la difficulté à récupérer leur financement accordé au prime abord pour l'acquisition de ces bien immobilier. Les banques se retrouvent en difficulté et en septembre 2008 la banque américaine Lehman Brother fait faillite créant la panique générale. L'interdépendance financier international et la globalisation fait propager cette crise dans le reste du monde. Des banques centrales commençant par la FED et les états à travers le monde ont entrepris des actions pour contrer la crise.

Cette crise a occasionné des variations en termes de volatilité les plus violentes dans l'histoire de la finance. A titre d'exemple, l'indice S&P500 (SPX) a chuté de 50% d'octobre 2007 à mars 2009 sans oublier qu'à la date du 15 septembre 2008 où la banque Lehman Brothers est déclarée en faillite, l'indice a perdu sa valeur de 4.7%, en un jour seulement. Des chiffres similaires ont été également observés pour l'indice Dow-Jones (DJA) qui perd aussi de plus de 50% de son niveau le plus haut en mars 2009. Les ETF SPY et le DIA ont subis les mêmes mouvements. Par ailleurs, la chute du prix du baril de pétrole a par conséquent chuté la valeur de l'ETF XLE en mars 2009 de plus de 50%. Cette crise a vraiment donné un coup de fouet aux ETF dont la volatilité fait l'étude de ce document.

1.4.2 La crise économique de 2020

Cette crise tire son origine de la pandémie liée au coronavirus. Pour faire baisser la contamination, les gouvernements à travers le monde ont pris des mesures drastiques y compris les mesures de confinement. Le confinement a participé à l'arrêt de plusieurs activités économiques spécialement dans les domaines de transport, du divertissement, de la restauration de l'hébergement, *etc.*

Cette crise qui au départ était sanitaire est devenue très subitement économique. A titre d'exemple sur le marché de l'énergie, la baisse de la demande dû au confinement fait chuter le prix du pétrole drastiquement. Dans ce climat, le 6 mars 2020 l'Arabie saoudite s'est engagée à réduire sa production d'un million de baril par jour si la Russie et ses partenaires pouvaient à eux aussi réduire leur production chose à laquelle la Russie s'oppose fragilisant les relations au sein de L'OPEP et les prix ont continué à chuter. Pour contrer ce refus de la Russie à collaborer dans le sens voulu par l'Arabie saoudite, ce dernier décide aussi d'augmenter sa production faisant baisser le prix de 25% en seulement 2 jours plus précisément le 9 mars 2020.

La combinaison des effets de la crise sanitaire à covid-19 et de la guerre du pétrole a fait baisser brutalement le niveau du XLE qui atteint son niveau le plus faible. Tous les indices à travers le monde ont été sévèrement touchés et par conséquent les ETF qui suivent ses indices ont subi les mêmes variations. Le S&P500 et le Dow Jones ont chuté de plus de 12% en une journée dans cette période eux aussi ainsi que les ETF SPY et DIA. Cette crise économique au départ sanitaire, a eu des conséquences graves sur la volatilité des actifs sur le marché financier mondiale ce qui tire la sonnette d'alarme des décideurs à travers le monde sur l'importance de vite canaliser une crise avant qu'elle ne devienne générale pour toucher tous les compartiments de la société.

Ces crises majeures du nouveau millénaire montrent que les crises économiques affectent violemment la volatilité des actifs financiers et des ETF plus particulièrement. *Spulbar, Cristi et al. (2022)* sont aussi arrivés à la conclusion que la COVID a affecté le marché des actions au Japon.

Ce document cherche à modéliser et prédire la volatilité avec les modèles de type GARCH en situation de crise et le choix de la crise s'est porté sur la COVID-19 en raison du fait que c'est la plus récente.

1.5 Justification de la recherche

Le choix porté sur les ETF suivant les indices se justifie pour deux principales raisons. La première est que ces ETF suivent le plus fidèlement possible les indices boursiers qui eux même reflètent la performance globale des entreprises constituant l'indice en d'autres termes la volatilité des ETF a un effet miroir permettant de connaître la performance d'un marché ou d'un secteur du marché. Comme exemple les entreprises du S&P500 ou du NASDAQ100 ou d'un secteur spécifique. De ce fait connaître le comportement d'un ETF revient à connaître indirectement le mouvement d'un marché financier ou d'un secteur d'un marché.

La deuxième raison répond à la question sur le pourquoi le choix n'est pas directement porté sur un indice plutôt que sur un ETF vu que celui-ci a une relation directe avec le marché ou le secteur. La réponse simple est que les ETF sont négociables pendant que les indices ne le sont pas. Pour cela, s'intéresser à la volatilité des ETF répond non seulement au souci de comprendre la volatilité d'un secteur ou marché global mais aussi aider les investisseurs avec la prévision de volatilité de ces actifs qui constitue une variante importante dans le choix d'investissement.

La littérature concernant la prévision de la volatilité par les modèles de type GARCH est bien fournie. Toutefois, il y a peu de recherche qui se sont intéressés à la volatilité des ETF comparés aux autres actifs financiers et cette recherche vient enrichir la littérature existante. Mon choix de m'intéresser particulièrement au marché des ETF est motivé par la possibilité d'investissement et surtout de diversification de risque avec des frais de gestion moindres. Ma deuxième motivation réside dans sa forme de gestion si je me réfère aux ETF qui suivent les indices qui est une gestion passive comparée à la gestion des fonds mutuels qui sont activement gérés et par ricochet ont des frais de gestion plus élevés.

Les modèles GARCH, EGARCH et GJR-GARCH sont utilisés dans ce mémoire pour chercher à savoir le modèle qui capture le mieux la volatilité et le modèle FIGARCH pour analyser le niveau de persistance de la volatilité.

1.6 Organisation du document

La suite de ce document sera élaborée dans un ordre selon lequel, LE CHAPITRE 2 sera dédié à la revue de la littérature qui commence par une introduction. Cette revue de littérature est divisée en trois parties dont la première abordera les faits stylisés des rendements en finance.

Une deuxième partie présentant la variabilité de la volatilité en d'autres termes l'hétéroscédasticité des rendements ainsi que les modèles permettant de modéliser la volatilité. Et la dernière partie sera consacré aux résultats et aux modèles souvent retenus pour la prévision des variables financière comme les indices.

LE CHAPITRE 3 est consacré à la présentation et l'analyse des données ainsi que tous les tests jugés indispensable pour la suite du travail. LE CHAPITRE 4 sera dédié à l'approche méthodologique dans ce sens que ce chapitre présentera les méthodes statistiques et modèles utilisés dans ce document.

LE CHAPITRE 5 va s'intéresser aux résultats. Ce chapitre des résultats sera divisé en deux parties principale dont la première sera consacrée aux moyennes conditionnelles des rendements des actifs étudiés déterminées par les modèles ARMA et la deuxième partie qui s'intéressera à la prévision de la volatilité avec les modèles de type GARCH en utilisant trois différentes distributions de probabilité afin de déterminer celle qui convient le mieux pour la modélisation. Et enfin le CHAPITRE 6 sera dédié à la discussion et conclusion.

Chapitre 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE

Résumé du chapitre

Ce chapitre débute par une introduction aux contributions des auteurs qui ont abordé la question de la prévision de la volatilité partant des modèles dont l'hypothèse repose sur la constance de la volatilité aux modèles avec hypothèse d'hétéroscédasticité à l'instar des modèles de type GARCH. Pour explorer la question de la volatilité, cette partie du document rappelle quelques faits stylisés sur la volatilité et les études empiriques menées qui les confirment. Plusieurs modèles et méthodes existent pour modéliser et faire la prévision de la volatilité et à ce sujet, ce chapitre se termine en présentant les différentes façons de modéliser la volatilité.

2.1 Introduction

Dans un souci de minimiser les pertes, les investisseurs s'intéressent à la volatilité des actifs dans lesquels ils souhaitent investir du fait qu'elle constitue une mesure du risque *Dutillo et al. (2021)*, *Kumar et al. (2020)*, *Hawaladar (2016)* et *Zivot (2016)*. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la modélisation de la volatilité à l'instar de *Merton (1969)*, *Black et Scholes (1973)* en supposant dans leur approche une économie sans friction ou sans crise traduisant ainsi une constance dans la volatilité (homoscédasticité). *Morgan (1976)* a démontré que la variance des rendements des action n'est pas constante et démontra que le rendement des actions est hétéroscédastique. Par la suite, plusieurs modèles moderne ont tenté d'expliquer et prédire la volatilité en contexte non constant (hétéroscédastique) à l'instar du modèle ARCH introduit par *Robert Engle (1982)*. La généralisation du modèle de Engle en y ajoutant la composante de variance conditionnelle retardée qui devient le modèle GARCH proposé par *Tim Bollerslev (1986)* a permis d'enrichir le pouvoir de prévision du modèle ARCH et d'avoir moins de paramètre à estimer.

Il est à noter cependant que selon la littérature, les investisseurs réagissent différemment aux chocs positifs et négatifs dans ce sens que ces derniers font fluctuer la volatilité beaucoup plus par rapport aux chocs positifs de même envergure ou magnitude. Cette asymétrie est abordée d'abord par *Black (1976)*, *French, Christie (1982)*, *Schwert et Stambaugh (1987)* et *Campbell et Hentschel (1992)*.

Nelson Daniel (1991), *Glosten, Jagannathan, et Runkle (1993)* se sont intéressé à cet aspect en y proposant les modèles respectivement EGARCH et GJR-GARCH pour capturer l'effet asymétrique. *Bruno Dinga, Jimbo Henry Claver, Kum Kwa Cletus et Shu Felix Chel (2023)* dans leurs travaux portant sur la volatilité des paires de devise USD/XAF et CNY/XAF en utilisant les modèles EGARCH et GJR-GARCH ont également trouvé l'effet de levier justifiant l'asymétrie dans la volatilité.

Ces dernières années, force est de constater que certains chercheurs dans leurs travaux ont trouvé l'effet contraire qui est l'effet de levier inversé dans la mesure où les chocs positifs font varier la volatilité que les chocs négatifs de même amplitude *Saeid Tajdini et al (2020)*. *Wu et al. (2012)* dans leurs travaux ont cherché à comprendre les caractéristiques du marché de l'or et sont arrivés à la conclusion que l'effet de levier ne s'aligne pas avec ce que prône la littérature. Ces situations montrent que les faits stylisés bien qu'évident dans la majorité des cas peuvent être non observés sur certains marchés sous certaines conditions.

Il est à rappeler également que, la volatilité n'est pas que conditionnelle et pourrait être purement stochastique ce que *Stephen Taylor (1986)* a montré dans ses travaux avec les modèles à volatilité stochastique qui ne fera pas l'objet de cette recherche.

Avant de s'intéresser aux modèles GARCH, il est important d'avoir une idée sur ce que dit la littérature sur les rendements ainsi que la volatilité. Ceci m'amène dans un premier temps à revoir les faits stylisés à cet effet et présenter plus tard les modèles GARCH.

2.2 Faits stylisés sur les données financières

2.2.1 Non normalité des rendements

Toutes les variables stationnaires n'ont pas la même distribution de probabilité plus particulièrement les rendements des variables financières sont souvent caractérisés par la non-normalité. Rappelons d'abord les caractéristiques de la normalité. Les caractéristiques les plus importantes d'une loi normale sont d'un skewness (degré d'asymétrie) égale à 0 et d'un kurtosis (degré d'aplatissement) valant 3. Par définition,

$$\text{SKEW}(X) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{E[(X-\mu)^3]}{(E[(X-\mu)^2])^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (= 0, \text{ pour la loi normal})$$

$$\text{KURT}[X] = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{E[(X-\mu)^4]}{(E[(X-\mu)^2])^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (= 3, \text{ pour la loi normal})$$

Il est cependant nécessaire de rappeler que *le kurtosis est un indice crucial à prendre en compte en matière de gestion de risque financier*. En effet, *un kurtosis très élevé montre que la probabilité de survenu des variations inattendues du rendement que cela soit de très grandes variations ou de très petites par rapport à la moyenne est plus élevé que dans le cas d'une distribution normale*. Cela étant, un portefeuille avec un kurtosis plus grand présente un risque plus élevé *ceteris paribus*.

Benoit Mandelbrot (1963) fut le premier qui dans sa recherche a trouvé que la distribution des prix des commodités comme le coton ne suit pas une distribution normale mais plutôt une distribution de Pareto caractérisé par des queues plus grande donc un kurtosis plus grand. Dans ses travaux *Fama (1965)* a analysé les rendements journaliers de 30 actifs financiers dont l'indice DJIA (Dow Jones Industrial Average) sur une période de 1957 à 1962 et arriva à la conclusion que les rendements des actifs financiers exhibent un excès de kurtosis (leptokurtic) traduisant le fait que la probabilité de survenue des variations extrêmes dans le cas des données financières est plus prononcée que dans le cas des données suivant une distribution normale.

Ce fait stylisé est largement accepté dans la littérature à l'instar de *Pagan (1996)*. *Taylor (2005)* va dans le même sens en utilisant les rendements journaliers du S&P500, FTSE 100, Nikkei 225, et des actions les plus négociés sur la bourse de New York (NYSE) et sur la bourse de Londres (LSEG) sur une période couvrant les années 80 à 90 en prenant soins de retirer la période avec les plus grandes variations pendant

la crise financière de 1987 appelé le *Black Monday*. Suite à ça, il constate que tous les actifs montrent un kurtosis de dix au minimum confirmant donc ce fait. Des résultats similaires sont trouvés en utilisant des périodes plus longues et ce fut le cas de (*Ding et al 1993*) pour les rendements du S&P500 de 1928 à 1991 ainsi que (*Ding et Granger 1996*) pour l'indice Nikkei de 1970 à 1992. *Cont (2001)* dans sa recherche a examiné certains faits stylisés et arrive à la conclusion que les données financières ne suivent pas une distribution normale mais plutôt caractérisé par un excès de kurtosis.

Ainsi, à chaque fois que la distribution des rendements des actifs financiers est supposée normale par le chercheur, cela voudra dire que celui-ci sous-estime les chocs ou les grandes variations observés dans les rendements (*Jondeau et al. 2000*).

2.2.2 La non (ou presque pas) d'autocorrélation des rendements.

Un autre fait stylisé majoritairement accepté dans la littérature est l'absence ou très faible autocorrélation des rendements. Il est cependant important de rappeler ce qu'est une fonction d'autocorrélation. La fonction d'autocorrélation montre tout simplement comment une variable Y_t est linéairement reliée à ses valeurs passées Y_{t-s} du moins une relation linéaire entre Y de la période t par rapport à la période $t-s$. En raison du fait que le changement de l'unité de mesure affecte la valeur de l'autocovariance, la fonction d'autocorrélation est privilégiée. La fonction d'autocorrélation (*Autocorrelation Function*, ACF, en anglais) φ_{t-s} est donc calculée en divisant la fonction d'autocovariance par la variance.

$$\varphi_{t-s} = \frac{E[(Y_t - E(Y_t)) \cdot (Y_{t-s} - E(Y_{t-s}))]}{\sigma_t \cdot \sigma_{t-s}}.$$

Pour y_t stationnaire, φ_{t-s} doit être compris entre -1 et 1.

Taylor (1965) calcul ainsi donc l'autocorrélation de 1 à 30 retards de différents actifs financiers comme S&P500, FTSE 100, Nikkei 225, et des actions les plus négociés sur la bourse de New York (NYSE) ainsi que sur la bourse de Londres (LSEG) et trouve que 90% des valeurs des autocorrélations sont compris entre -0,05 et 0,05. *Ding et al (1993)* ont eux aussi trouvé des résultats allant dans ce même sens. *Cont (2001)* trouve également que l'autocorrélation des rendements est insignifiant exception faite pour des rendements sur de très petites période (20 minutes).

2.2.3 Effet de levier

La notion d'effet de levier fut en premier introduit par *Black (1976)* qui montre une corrélation négative entre la nature de la volatilité et les rendements. A cet effet, une augmentation du rendement (bonne nouvelle) entraîne une volatilité modérée et une baisse des rendements (mauvaise nouvelle) entraîne une volatilité plus grande. Voir *Cont (2001)*. De ce fait, les rendement positifs et négatifs de même amplitude n'ont pas la même conséquence sur la volatilité. Voir *Taylor (2005)*.

2.2.4 Cluster de volatilité

Ce fait stylisé explique le fait qu'une forte volatilité sera dans la majorité des cas suivie par une forte volatilité et une faible volatilité par une autre de même nature. Cet état de situation montre que la volatilité affiche une autocorrélation positive qui explique la persistance de la volatilité sur plusieurs périodes *Cont (2001)*. *Hamilton (1989)* propose le changement du comportement de la volatilité dans la mesure où les périodes de grande volatilité se suivent de même pour les périodes à faible volatilité. *Kyle (1985)* et *Admati et Pfleiderer (1988)* soulignent qu'une période avec un gros volume de négociation sur le marché peut entraîner ce fait.

2.3 Les différentes façons de modéliser la volatilité

Plusieurs possibilités s'offrent au chercheur pour modéliser la volatilité. *Dimos S. Kambkouroudis et al. (2016)* ont examiné la façon la plus efficace de modéliser et prédire la volatilité. Pour se faire, ils ont utilisé les modèles GARCH, la prévision utilisant comme variable explicative la volatilité implicite, une prévision avec la volatilité réalisée et une dernière approche en incluant à la fois la volatilité implicite et réalisée comme variables explicative dans le modèle GARCH. Pour parvenir, ils ont choisi les rendements des indices comme S&P500, Dow Jones Industrial Average (DJIA) et le Nasdaq100 ainsi que leurs volatilités implicites respectivement VIX, VXD, et VXN, qui vont du 02 février 2001 à 23 février 2010. Leurs résultats montrent que la volatilité implicite et la volatilité réalisée permettent de mieux faire la prévision qu'avec les modèles GARCH. Par ailleurs, il faut noter qu'une combinaison linéaire d'un modèle de type GARCH avec la volatilité implicite et la volatilité réalisée comme variable exogène au modèle est plus efficace. Ils ont confirmé ces résultats en procédant de la même façon en utilisant cette fois ci six indices européen à savoir EURO STOXX, CAC40, DAX30, AEX, SMI, FTSE100 de février 2001 à février 2013. Une autre façon de modéliser la volatilité est l'usage des modèles hybride composé des modèles GARCH et Artificial neural Network ou réseau des neurones (ANN).

Iqbal (2004) trouve que la prévision en y intégrant la composante de réseau des neurones est beaucoup plus efficace que la prévision avec la volatilité implicite en utilisant l'indice S&P500. *Xunfa Lu, Danfeng Que et Guangxi Cao (2016)* ont trouvé que le modèle GARCH-ANN performe mieux que leurs variantes prise individuellement. *Bildirici et Ersin (2013)* trouve également que le modèle hybride GARCH-ANN performe mieux pour la prévision de la volatilité du pétrole brute. *Shiqing Ling et Michael McAleer (2001)* sont arrivés aussi à la même conclusion. *Sauraj Verma (2021)* va dans la même logique où le modèle hybride GARCH-RNN performe mieux que les modèles pris individuellement pour la prévision de la volatilité du pétrole brute.

Cette recherche s'intéresse particulièrement aux méthodes de prévision en utilisant les modèles GARCH. Le modèle ARCH introduit par *Robert Engle (1982)* permet de modéliser la volatilité en prenant comme variable les valeurs retardées des résidus carrés. La généralisation du modèle de Engle en y ajoutant la composante de variance conditionnelle retardée qui devient GARCH proposé par *Tim Bollerslev (1986)* a permis d'enrichir le pouvoir de prévision du modèle ARCH.

Pour capturer l'effet asymétrique observé dans la volatilité expliqué plus haut, *Nelson Daniel (1991)*, *Glosten, Jagannathan, et Runkle (1993)* ont proposé les modèles respectifs EGARCH, GJR-GARCH. *French, Christie (1982)*, *Schwert et Stambaugh (1987)* et *Campbell et Hentschel (1992)* ont eux aussi confirmé la présence de cet effet asymétrique dans leurs travaux.

Il est cependant important de rajouter que la fréquence des données joue également un important rôle dans la mesure où les données sur de très courtes périodes renferment (rendements intra jour) plus d'éléments pour la prévision *Fung & Hsieh, (1991)* ainsi que *Andersen & Bollerslev 1998*). Pour répondre à la question pour savoir le modèle de type GARCH qui modélise le mieux la volatilité, certains chercheurs sont allés dans le même sens que la littérature démontrant une capacité de prévision supérieur quand on utilise les modèles prenant en considération l'asymétrie de la volatilité à l'instar de EGARCH et GJR-GARCH. Parmi ceux-ci on pourra citer *Brooks and Persaud (2003)*, *Marcucci (2005)* qui trouve que EGARCH et GJR-GARCH sont plus efficace en période de crise et GARCH plus efficace en économie sans crise pour les ETF. *Poon et Granger (2003)* ont trouvé mieux le modèle GARCH simple. *Hansen et Lunde (2005)*, *Laurent et al. (2010)* ont conduit l'étude en prenant en compte les différentes variantes du modèle GARCH et arrivent à la même conclusion.

Chapitre 3 APPROCHE MÉTHODOLOGIQUE

Résumé du chapitre

Ce chapitre présente de façon détaillée les modèles ayant servi à la modélisation et la prévision de la volatilité dans ce document. La présentation de ces modèles commence par les rendements suivis par le modèle ARMA, par la suite sont présentés les modèles de volatilité ARCH, GARCH ainsi que ses variantes capturant l'effet asymétrique dans la volatilité à l'instar des modèles EGARCH et GJR-GARCH suivi par FIGARCH qui permet d'analyser le niveau de persistance dans la volatilité. Ce chapitre se termine par la présentation des tests tels que le test du multiplicateur de Lagrange de Engle (1982) et le test du ratio de la variance proposé par Andrew W. Lo et A. Craig MacKinlay (1988) qui ont permis de vérifier la présence d'effet ARCH dans les résidus obtenus à partir de l'équation de la moyenne conditionnelle modélisée avec le modèle ARMA

3.1 Introduction

Pour arriver à l'objectif poursuivi par ce document, il convient de rappeler les modèles ainsi que les définitions nécessaires à cet effet. Le point de départ pour la majorité des études en finance est le calcul des rendements que ça soit dans une perspective d'évaluation de risque comme la VAR ou encore de prévision de la volatilité avec les modèles GARCH. La raison est que les rendements pour la majeure partie du temps sont stationnaires et montrent le gain et/ou la perte directement comparé aux prix. En premier, seront présentés les rendements et par la suite, présenter le modèle ARIMA qui permettra de capturer la moyenne conditionnelle de la série indispensable pour pouvoir dégager les résidus qui soient indépendants et identiquement distribués. Toutefois il est important de rappeler qu'il est possible d'arriver à un ARIMA(0,1,0) ce qui signifiera que les rendements suivent un processus bruit blanc. Le modèle ARCH introduit par *Engle (1982)* sera présenté suivi de sa version plus généralisé GARCH proposé par *Bollerslev (1986)* ainsi que ses variantes asymétrique EGARCH, GJR-GARCH. Ce chapitre s'intéressera également à la persistance de la volatilité en utilisant le modèle FIGARCH.

3.2 Le rendement

Comme mentionné plus haut, le calcul du rendement est la pierre angulaire autour de laquelle sera fondé tout le reste des études présentées dans ce mémoire. Partant de ce constant, on trouve judicieux d'expliquer encore une fois cette notion de manière plus détaillée. Le rendement mesure le gain ou la perte d'un actif (ici du ETFi) d'une période à une autre.

$$r_t = 100 * \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \text{ avec } P_t \text{ le prix à la période } t \text{ et } P_{t-1} \text{ à la période } t - 1$$

Mathématiquement, le rendement ainsi défini est approximativement égal à la variation en pourcentage du prix P de $t-1$ à t à condition que la valeur absolue de ce pourcentage soit strictement inférieure à 1. En fait,

$$r_t = 100 * \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = 100 * \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) \approx 100 * \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \text{Variation en \% de } P_t.$$

Ce rendement décomposé présentera une partie moyenne conditionnelle et d'une partie stochastique présenté comme suit :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t,$$

avec $\varepsilon_t = \sigma z_t$ où z_t est identique et indépendamment distribué (i.i.d) et $\mu = E(r_t)$

De la décomposition ci-dessus présentée, on peut avoir la partie constante et la partie stochastique. Cette approche permet d'utiliser le modèle ARMA pour capturer la moyenne conditionnelle. Une autre raison qui justifie le modèle ARMA est que cela permet de déduire les résidus qui vont permettre de construire le modèle GARCH.

3.3 Le modèle ARMA

Dans le but de pouvoir récupérer les résidus indispensables pour la prévision avec les modèles GARCH, le modèle ARMA est un bon choix pour capturer la moyenne conditionnelle des rendements.

Le modèle ARMA(p, q) stationnaire est une combinaison entre le modèle autorégressive AR(p),

$$r_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \varepsilon_t \text{ avec } \varphi_i < 1,$$

et le modèle moyenne mobile MA(q),

$$r_t = \mu + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t.$$

ARMA(p, q) est donc $r_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-1} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t = \sigma z_t$ où z_t est i.i.d.

Ce modèle reste un outil important de modélisation et de prévision des données financières à condition que l'on soit en présence des variables stationnaires (Wang *et al.* 2022).

Les résidus recueillis à partir de ce modèle serviront à modéliser et prédire la volatilité. Parmi les modèles retenus pour la prévision on peut retenir le modèle ARCH, GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, et le FiGARCH.

3.4 Modèles de type ARCH/GARCH

3.4.1 ARCH

En plus de modélisation de l'espérance conditionnelle, le premier modèle de la catégorie ARCH et GARCH qui a permis de modéliser la volatilité conditionnelle en présence d'hétéroscédasticité est celui développé par Engle (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH). L'idée principale derrière cela est que malgré le fait que les résidus soient non autocorrélés, la variance pourrait avoir une relation quadratique avec les résidus. Sa formule est donnée par :

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \epsilon_t}$$

et $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, un bruit blanc gaussien $z_t \stackrel{iid}{\sim} (0, 1)$ $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$.

Malgré la qualité de ce modèle, dans une situation où l'on aura besoin d'estimer le modèle avec beaucoup de retard, l'estimation des coefficients ou paramètre deviendront fastidieux (Rydberg, 2000). Pour pallier cette situation, Bollerslev (1986) propose le modèle GARCH.

3.4.2 GARCH

Une généralisation du modèle ARCH a été présentée plus tard par *Bollerslev (1986)* pour répondre aux insuffisances du modèle en y intégrant la variance conditionnelle.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} & \text{avec } q \geq 0, p > 0, \alpha_0 > 0 \\ & \alpha_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p \\ & \beta_j \geq 0 \text{ for } j = 1, \dots, q \end{aligned} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Il est à noter que les paramètres ici sont tous contraints à des valeurs non négatives, ce qui assure la non-négativité de la variance mais suppose l'effet de la volatilité soit symétrique. Les versions asymétriques du modèle GARCH permettent de capturer l'effet asymétrique de la volatilité.

3.4.3 EGARCH

Les deux modèles précédents à savoir le ARCH et GARCH permettent de modéliser la volatilité mais ne permettent pas de détecter l'effet de levier, soit l'effet asymétrique. C'est pour cela que Nelson (1991) propose le GARCH exponentiel (EGARCH).

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

où $g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|]$ avec $\alpha_i, \beta_j, \gamma, \theta$ des coefficients. Et l'équation du modèle EGARCH peut s'écrire par

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\theta \varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|]] + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

La fonction de réponse $g(\varepsilon_t)$ a deux composantes, $\theta\varepsilon_t$ qui détermine le signe et $|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|$ l'ampleur ou sa grandeur. Avec cette fonction de réponse nous pouvons facilement identifier la symétrie. Si $\varepsilon_t < 0$ $g(\varepsilon_t)$ prend la forme $(\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|)$ sinon si $\varepsilon_t > 0$, $g(\varepsilon_t)$ prend la forme $(\theta - \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|)$. Pour s'assurer de l'asymétrie, on s'attend à ce que θ soit négatif (Tsay, 2013). $|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|$ permet de savoir de combien l'effet des chocs négatifs dépasse les chocs positifs de même magnitude.

D'autres chercheurs ont eux aussi à leur façon chercher à développer des modèles permettant de capturer l'effet asymétrique. Par ceux-ci on pourra citer le modèle GJR-GARCH Glosten-Jagannathan-Runkle (1993)

3.4.4 GJR-GARCH

Ce modèle se présente dès lors comme une alternative idéale au modèle EGARCH qui prend en compte l'asymétrie sans toutefois appliquer le logarithme népérien, dont l'équation suit :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{avec } I_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-i}^2 < 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_{t-i}^2 \geq 0 \end{cases}$$

La variable binaire I_{t-i} permet de déterminer l'asymétrie. Encore une fois tous les coefficients doivent être positifs. Dans ce modèle on remarque que les chocs négatifs doivent causer plus de variation que les chocs positifs de même amplitude.

3.4.5 FIGARCH

Le modèle FIGARCH est une autre variante des modèles de type GARCH. Ce modèle reste utile pour modéliser la volatilité quand la persistance ou la mémoire longue dans la volatilité est suspectée et dans la pratique quand la somme des coefficients du modèle GARCH s'approche de l'unité. Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) ont développé le modèle FIGARCH, et pour ce faire, une variable d compris entre 0 et 1 comme intégration fractionnaire est intégré au modèle GARCH. Un d égale à zéro correspond exactement au modèle GARCH et plus d se rapproche de l'unité, plus la volatilité est persistante.

La variance conditionnelle du modèle FIGARCH s'écrit :

$$\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \alpha(L)(1 - L)^d\} \varepsilon_t^2,$$

avec L comme opérateur de retard $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ et $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q$;

et $(1 - L)^d$ représentant la différence fractionnaire de la volatilité. $(1 - L)^d$ est équivalent à :

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k$$

3.5 Test d'effet ARCH

3.5.1 Le test de multiplicateur de Lagrange de Engle

Le test d'effet ARCH proposé par Robert Engle (1982) permet de tester s'il y a une relation fonctionnelle entre les carrés des résidus. Si la relation fonctionnelle ne se confirme, alors les résidus n'ont pas d'effet ARCH ce qui rend impossible l'usage des modèles de type GARCH.

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + v_t$$

L'idée de ce test est de savoir si les carrés des résidus sont corrélés ou de tester la nullité des coefficients dans l'équation susmentionnée. La statistique de ce test suit asymptotiquement une distribution de khi-deux qui est donnée par TR^2 . Vu que la moyenne conditionnelle est supposée constante en raison de la stationnarité, T représente le nombre d'observations. Les hypothèses du test sont telles que :

$$\mathbf{H}_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$$

$$\mathbf{H}_1: \text{au moins un } \alpha \neq 0$$

$$\text{Une autre version de ce test est que la statistique F du test suive } F = \frac{(SCR_0 - SCR_1)/q}{SCR_1/(T - 2q - 1)}$$

3.5.2 Le test de ratio de la variance

Le test de ratio de la variance a été pour la première fois présenté par Andrew W. Lo et A. Craig MacKinlay (1988) permet de tester l'effet de marche aléatoire dans une série temporelle. Si on suppose r_t comme étant le rendement à la période t et $\text{Var}(r_t(k))$ représente la variance jusqu'à la k ième période. La statistique du test est donnée par :

$$VR(k) = \frac{\text{Var}(r_t(k))}{k \cdot \text{Var}(r_t(1))}$$

L'hypothèse nulle de ce test affirme que r_t suit un processus de marche aléatoire ce qui sous-entend $VR(k) = 1$. L'hypothèse alternative est que la série ne suit pas une marche aléatoire et dans ce cas la valeur de $VR(k)$ doit être significativement différent de 1 ou idéalement s'en éloigner.

Chapitre 4 PRESENTATION ET ANALYSE DES DONNEES

Résumé du chapitre

Il s'agit ici d'un court chapitre qui présente les données utilisées dans ce document. La première partie touche la statistique descriptive qui présente la plage de sélection des données et la source ainsi que le nombre d'observations. Cette statistique descriptive présente pour chaque ETF, la moyenne, la médiane, l'écart type, le skewness, le kurtosis, le maximum et le minimum des rendements. La question de la distribution de ces rendements est abordée dans cette partie du travail en procédant au test de Jarque-bera. Pour la conduite du modèle ARMA, afin de dégager la moyenne conditionnelle des rendements il faut s'assurer de la stationnarité des rendements et pour ce faire, les tests utilisés à cet effet sont présentés à savoir le test de stationnarité de Dickey Fuller Augmenté (DFA), Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), ainsi que celui de Zivot Andrews.

4.1 Statistique descriptive

Cette recherche porte sur les ETF à savoir le SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**) qui suit le S&P500, SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**) qui suit le Dow Jones, et l'ETF Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**).

Les données vont du 01 janvier 2000 au 31 décembre 2024 et scindées en deux. La première partie qui servira à la construction des modèles avec 5078 observations va du 01 janvier 2000 au 11 mars 2020 qui marque la date à laquelle l'OMS déclare la COVID-19 comme une pandémie et la deuxième partie qui couvre la période après cette date de déclaration jusqu'au 31 décembre 2024 servira à l'évaluation des modèles.

Tableau 1 : Statistique descriptive des rendements

	SPY	DIA	XLE
count	5078	5078	5078
mean	-0.0125	-0.0144	-0.00467
std	1.210202	1.145826	1.735257
min	-13.5577	-12.3845	-18.2518
25%	-0.57339	-0.54057	-0.91635
50%	-0.05698	-0.05766	-0.04239
75%	0.478742	0.460041	0.81615
max	10.36372	9.524613	22.49098
skewness	0.127881	0.039081	0.706545
kurtosis	10.45606	10.68089	14.36647

Le choix de la date du 11 mars 2020 apparaît comme un choix idéal en raison du fait que ça servira à voir si le modèle construit arrive à prévoir la volatilité en période de crise. Comme annoncé plus haut, j'ai calculé la variation en pourcentage d'un jour à l'autre comme suit :

$$r_t = 100 * \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Pour ce qui concerne la statistique descriptive, la moyenne des rendements est négative et tourne au tour de zéro pour l'ensemble des ETF en commençant par le SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**) dont la moyenne fait - 0,0125, tandis que le SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**) affiche une

moyenne de $-0,0144$ et finalement le Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**) a pour moyenne $-0,00467$. Avec les médianes inférieures aux moyennes, la médiane du SPY qui vaut $-0,05698$, le DIA qui vaut $-0,05766$ et le XLE qui vaut $-0,04239$ les skewness positif de $0,127881$, $0,039081$, et $0,706545$ respectivement du SPY, DIA et XLE sont donc justifié. Ces valeurs positives des skewness montrent que la majorité des rendements sont à gauche de la moyenne en d'autres termes inférieurs aux moyennes et les valeurs extrêmes à droite. Les kurtosis également sont de 10 au minimum.

4.2 Distribution des rendements (jarque – bera)

Ces valeurs du skewness et du kurtosis sont largement au-dessus de celles caractérisant une distribution normale. La preuve que les rendements n'exhibent pas de normalité en termes de distribution de probabilité. Cette situation m'amène à procéder au test de Jarque-Bera pour vérifier cette affirmation. Ce test permet de détecter de combien le skewness et le kurtosis diffèrent de 0 et 3 respectivement. Les hypothèses ainsi que la statistique du test sont données par :

H0 : les rendements suivent une distribution normale

H1 : les rendements ne suivent pas une distribution normale

$$J = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (K - 3)^2 \right) \text{ avec } n \text{ le nombre d'observation, } K \text{ le kurtosis et } S \text{ le skewness.}$$

Cette statistique suit une distribution de khi-carré.

Les p values de 0.000 inférieur à 0.05 obtenus pour l'ensemble des trois actifs ont permis de rejeter l'hypothèse nulle et conclure que les rendements ne suivent pas une distribution normale.

4.3 Analyse des rendements

À la suite du calcul des rendements des actifs je procède aux représentations graphiques ainsi qu'aux test de stationnarité pour savoir si ces rendements sont stationnaire. Pour cela certains tests de stationnarité ont été conduit sur les rendements à savoir le test de Dickey Fuller Augmenté (DFA), le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), et de Zivot Andrews.

Le test de Dickey Fuller Augmenté (DFA) montre que les rendements des trois actifs sont stationnaires. Le fait que la P-value de 0,000 soit inférieur à 0,05 pour l'ensemble des ETF, nous avons assez d'informations pour rejeter l'hypothèse nulle au seuil de 5%. Ce même raisonnement s'applique pour

le test de stationnarité de Zivot Andrews aussi longtemps que c'est l'hypothèse nulle qui est rejetée qui affirme la non stationnarité de la série. De ces deux tests le fait de rejeter l'hypothèse nulle veut dire qu'accepter l'hypothèse alternative selon laquelle la série est stationnaire.

Pour le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) il y a une petite différence dans la formulation des deux hypothèses dans ce sens que l'hypothèse nulle affirme la stationnarité de la série tandis que l'hypothèse alternative affirme une série non stationnaire. Les p-values de 0,19; 0,396 et 0,094 respectivement des rendements du SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**), SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**), et du Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**) étant supérieur à 0,05 font que nous n'avons pas assez d'informations pour rejeter l'hypothèse nulle au seuil de 5% ce qui revient à accepter l'hypothèse nulle. Ces trois tests permettent de s'assurer de la stationnarité des rendements. S'assurer de la stationnarité des rendements permet d'éviter un problème de *corrélation fallacieuse ou spurious correlation*. Campbell et Perron (1991) et Engle et Granger (1987).

Tableau 2 : Tests de stationnarité

	Dickey Fuller Augmenté (DFA)		KSS		Zivot Andrews	
	statistique du test	P-value	statistique du test	P-value	statistique du test	P-value
SPY	-12.62	0.000	0.249	0.19	-13.152	0.000
DIA	-13.196	0.000	0.148	0.396	-13.67	0.000
XLE	-17.097	0.000	0.358	0.094	-13.152	0.000
Hypothèses	H0 : la série présente une racine unitaire		H0 : la série est stationnaire		H0 : la série présente une racine unitaire	
	H1 : la série est stationnaire		H1 : la série présente une racine unitaire		H1 : la série est stationnaire	

Chapitre 5 PRESENTATION DES RESULTATS

Résumé du chapitre

Ce chapitre montre et explique la prévision glissante utilisée comme approche dans ce document. Ceci commence par la recherche de l'ordre des modèles ARMA déterminé avec le critère d'information AIC, la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocorrélation partielle. Dans la partie résultats des estimations des modèles ARMA, l'ensemble des modèles ARMA suggérés sont présentés et estimés pour chaque ETF ainsi que le test d'autocorrélation des résidus. Pour le modèle ARMA la méthodologie de Box-Jenkins est retenue.

La deuxième partie de ce chapitre aborde les modèles de volatilités. Tout d'abord les tests effectués ont validé la présence d'effet ARCH dans les résidus des modèles ARMA. Pour modéliser la volatilité, la méthode de l'estimation du maximum de vraisemblance utilisée nécessite que la distribution de probabilité des résidus des modèles soit connue. Les estimations des coefficients des modèles de type GARCH des différentes ETF sont faites en supposant trois distributions de probabilité à savoir, la distribution normale, de student et le generalized error distribution (GED). En présentant et comparant tous les modèles, entre eux selon les différentes distributions.

Les critères d'informations et le graphique quantile-quantile (qqplot) montrent que la distribution de student présente des résultats plus intéressants. Pour retenir les modèles sous cette distribution, le test d'autocorrélation des résidus est effectué. Une fois ces modèles confirmés, la prévision est faite et la volatilité réalisée est calculée à partir d'un proxy. La comparaison de l'efficacité des modèles est faite pour déterminer le meilleur modèle de prévision pour chaque actif.

5.1 Introduction

Dans la logique de modéliser et prédire la volatilité dans ce document, une approche de prévision glissante est retenue (*rolling forecasting*). Cette approche consiste à rajouter la dernière volatilité prédite à la liste existante de volatilité et à réestimer le modèle pour la prochaine prévision et ainsi de suite. Cette approche permettra d'estimer la volatilité pour un horizon plus lointain que si une prévision simple était faite à la place. Vu l'étendue des données retenue dans ce document comme le *out of sample data* qui va du 11 Mars 2020 au 31 Décembre 2024, sans une approche de prévision glissante, la prévision perdra de son efficacité aussi longtemps qu'on s'éloignera dans le temps.

5.2 Moyenne conditionnelle des rendements avec le modèle ARMA

Ce modèle ARMA permettra de déterminer la moyenne conditionnelle de la série et permettra à obtenir les résidus indispensables pour l'utilisation des modèles de prévision de volatilité GARCH. Ce modèle est appliqué aux rendements allant du 01 janvier 2000 au 11 Mars 2020 des trois actifs à savoir le SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**) qui suit le S&P500, le SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**) qui suit le Dow Jones, et le l'ETF Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**). La méthodologie de Box-Jenkins est adoptée.

5.2.1 ACF/PACF et AIC des rendements

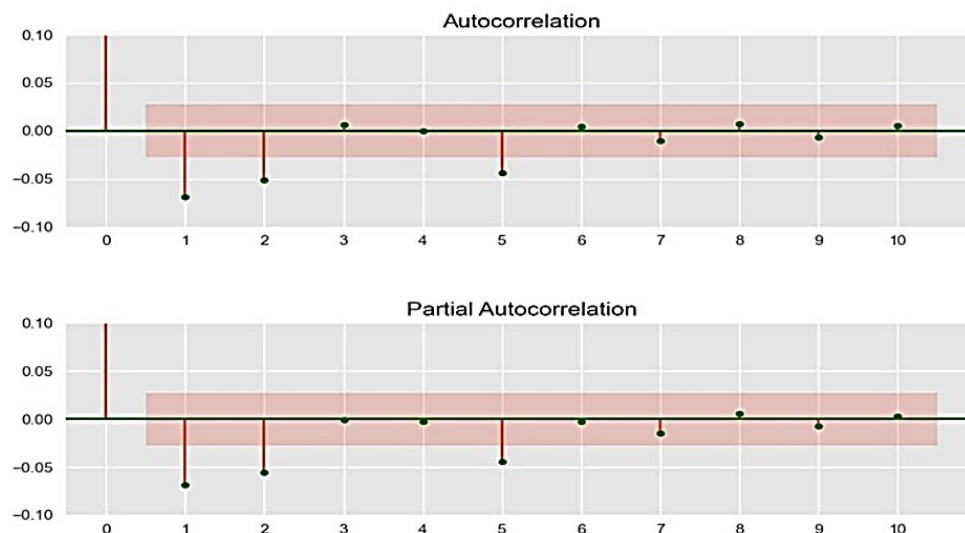


FIGURE 1: ACF/PACF DES RENDEMENTS DU SPY

TABLEAU 2 : AIC SELON L'ORDRE P ET Q DU MODELE ARMA

DES RENDEMENTS DU SPY

P	Q	AIC
3	3	16303.68
0	2	16315.14
2	0	16315.27
1	1	16315.99
1	2	16317.13
0	3	16317.13
2	1	16317.26
3	0	16317.26
3	2	16318.56
2	2	16319
2	3	16319.05
1	3	16319.13
3	1	16319.26
0	1	16326.3
1	0	16329.19
0	0	16351.38

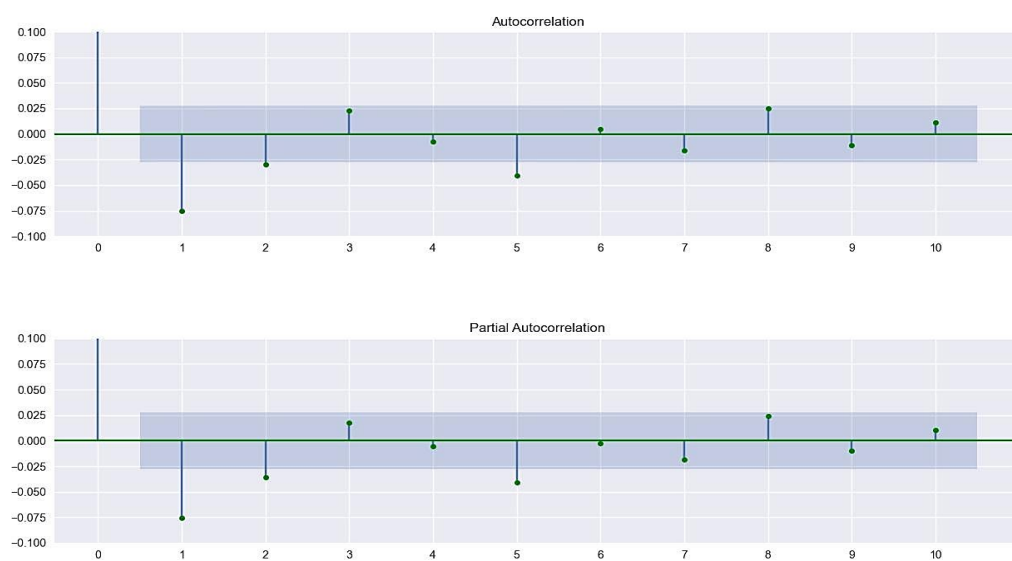


FIGURE 2: ACF/PACF DES RENDEMENTS DU DIA

TABEAU 3 : AIC SELON L'ORDRE P ET Q DU MODELE ARMA DES RENDEMENTS DU DIA

P	Q	AIC
2	3	15749.9
3	2	15751.16
2	0	15764.53
3	0	15764.96
2	2	15765.25
0	2	15765.34
2	1	15765.47
0	3	15765.63
1	2	15766.16
3	3	15766.29
1	1	15766.38
3	1	15766.93
0	1	15766.99
1	3	15767.46
1	0	15768.92
0	0	15796.24

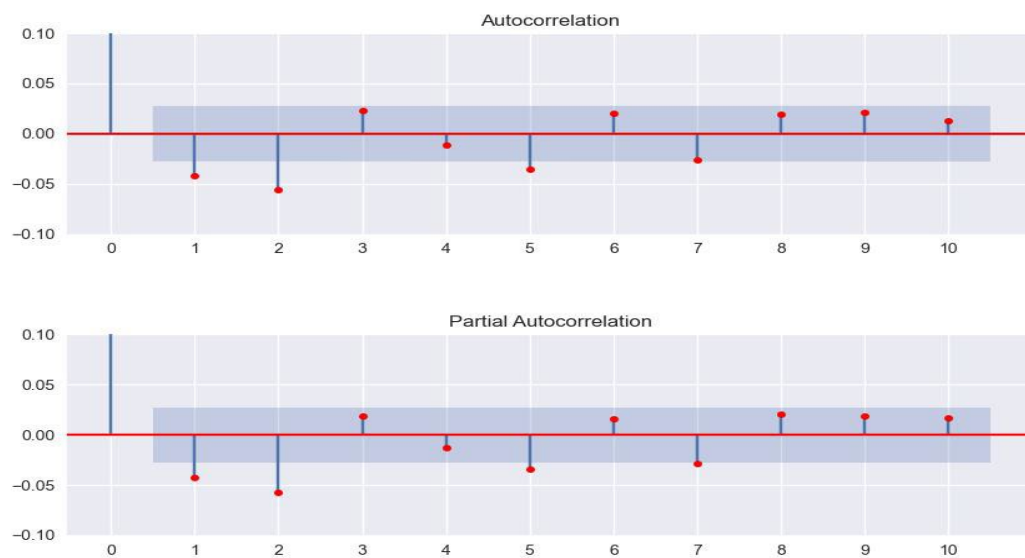


FIGURE 3 : ACF/PACF DES RENDEMENTS DU XLE

TABLEAU 4: AIC SELON L'ORDRE P ET Q DU MODELE ARMA DES RENDEMENTS DU XLE

P	Q	AIC
2	4	19982.09
2	3	19984.79
3	2	19984.8
4	4	19986.68
4	3	19987.32
3	4	19987.45
3	3	19988.23
4	2	19988.53
2	0	19989.38
2	2	19989.52
3	0	19989.58
2	1	19989.64
0	2	19989.87
0	3	19990.21
1	2	19990.33
4	1	19990.45
4	0	19990.67
3	1	19991.4

De ces graphiques de fonction d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, ainsi que les tableaux présentant les différents ordres du modèle ARMA avec leurs critères d'information AIC respectifs, nous retenons que pour SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**), le ACF/PACF et le AIC suggèrent tous ensemble un ARMA (3,3) avec un AIC plus faible de 16303.68. A cet effet le modèle ARMA (3,3) sera estimé et retenu comme l'équation de la moyenne conditionnelle de cet actif.

En observant de prêt l'ACF et le PACF du SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**), on peut voir qu'ils coupent après 1 tous les deux ce qui suggère un ARMA (1,1) et au même moment l'ordre du modèle suggéré est l'ARMA (2,3) si on tient compte du critère d'information AIC. Le fait que l'ordre trouvé par le ACF/PACF et le critère d'information ne sont pas les mêmes, il sera alors utile d'estimer les deux et décider lequel choisir finalement.

Cette même situation est observée avec le Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**) dans la mesure où le ACF/PACF et le critère d'information ne donnent pas les mêmes ordres de modèle ARMA.

Dans la prochaine session les résultats des différentes estimations seront présentés en commençant par ARMA (3,3) du SPDR S&P 500 ETF Trust (**SPY**) ensuite ARMA (1,1) et après ARMA (2,3) du SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**) et finalement ARMA (2,4) du Energy Select Sector

SPDR Fund (**XLE**). Des deux modèles ARMA des deux derniers actifs, le meilleur modèle ARMA sera choisi pour chaque actif.

5.2.2 Résultats des estimations des modèles ARMA

Dans les tableaux ci-dessous les Θ représentent les coefficients de la partie AR et les $\emptyset$ représentent les coefficients de la partie MA du modèle.

TABLEAU 5 : ARMA (3,3) DU SPDR S&P 500 ETF TRUST (SPY)

		Coef	P-value	Erreur standard	Breusch-Godfrey (P-value)	AIC
SPY ARMA (3,3)	μ	-0.0099	0.52	0.015	0.927395	16303.675
	Θ_1	0.1041	0.007	0.039		
	Θ_2	-0.3536	0.000	0.031		
	Θ_3	0.7949	0.000	0.036		
	$\emptyset_1$	-0.1525	0.000	0.036		
	$\emptyset_2$	0.3115	0.000	0.030		
	$\emptyset_3$	-0.8084	0.000	0.031		
	sigma2	1.4345	0.000	0.013		

Ce modèle ARMA (3,3) présenté dans le tableau ci-dessus, s'avère être l'idéal pour les données utilisées pour l'estimation du fait qu'il a le plus petit critère d'information et en plus tous les coefficients sont significatifs au seuil de 5% ($p\text{-value} < 0.05$) à l'exception de la constante μ qui affiche un p-value de 0.52 que je laisse malgré tout vu sa valeur très proche de zéro. Les erreurs standards des coefficients sont également acceptables.

Après l'estimation du modèle, il y a nécessité de s'assurer que les résidus issus du modèle ne sont pas autocorrélés. A cet effet le test de **Breusch-Godfrey** a été effectué. L'hypothèse nulle de ce test affirme la non présence d'autocorrélation sérielle dans les résidus du modèle estimé. Le fait que la p-value soit supérieur à 0.05 ($0.927395 > 0.05$) fait que je n'ai pas assez de raison pour rejeter l'hypothèse nulle. Cette valeur de la p-value du test me donne raison à accepter l'hypothèse nulle et conclure la non autocorrélation dans les résidus.

Le critère d'information minimal, la non autocorrélation des résidus confirmée par le test de **Breusch-Godfrey**, la significativité des coefficients au seuil de 5% me font retenir ARMA (3,3) comme l'équation de la **moyenne conditionnelle des rendements du SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY)**.

L'ACF/PACF des rendements du SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (DIA) suggère un ARMA (1,1) dont l'estimation montre que ses coefficients sont tous significatifs au seuil de 5% ($p\text{-value} < 0.05$) sauf pour la constante μ dont la $p\text{-value}$ est 0.344. Pour ce qui concerne la sélection du modèle concernant le même actif, selon le critère d'information AIC, je retiens ARMA (2,3) qui a le AIC plus faible (15749.9). La non significativité de la constante μ dans les deux modèles m'amène à l'exclure et à réestimer les deux modèles pour voir ce qui en découle. L'exclusion de la constante faite réduire certes le critère d'information AIC mais en regardant de près, ça engendre le problème d'autocorrélation des résidus observable par les valeurs des $p\text{-values}$ après le test de Breusch-Godfrey. Ces $p\text{-values}$ sont inférieurs à 0.05 rejetant ainsi l'hypothèse nulle qui affirme la non autocorrélation des résidus donc sous-entendu accepter l'hypothèse alternative que les résidus sont autocorrélés. Cette situation me donne raison à conserver la constante dans le modèle finalement retenu. ARMA (2,3) devient à cet effet l'équation de la moyenne conditionnelle du **SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (DIA)** pour la série des données utilisée pour les estimations.

L'ACF et le PACF du Energy Select Sector SPDR Fund (XLE) suggèrent un ARMA (1,1) avec un AIC de 19996,02 tandis que la recherche par itération pour détecter l'ordre du modèle avec le plus petit critère d'information AIC montre plutôt un ARMA (2,4) avec un AIC qui fait 19982,09. Les coefficients du modèle suggéré par l'ACF et le PACF bien que satisfaisants, affichent des résidus autocorrélés avec un $p\text{-value}$ du test de Breusch-Godfrey inférieur à 0.05. Le choix final est alors porté sur ARMA (2,4) dont les résultats de l'estimation dans le tableau ci-dessous. Encore une fois la constante n'est pas significative au seuil de 5% que je décide encore de garder pour éviter le problème d'autocorrélation dans les résidus. Au-delà de la non-significativité des résidus, l'ensemble des coefficients du modèle sont significatifs. Ce modèle présente le plus petit critère d'information AIC qui fait 19982.09. Avec un $p\text{-value}$ de $0.14 > 0.05$, le test de Breusch-Godfrey a permis d'accepter le fait que les résidus issus de ce modèle ne sont pas autocorrélés. Ce modèle est ainsi retenu comme le modèle qui fera objet de moyenne conditionnelle.

Tableau 6: ARMA (1,1) et ARMA (2,3) du SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (DIA)

		AVEC LA CONSTANTE μ					APRES L'EXCLUSION DE LA CONSTANTE μ				
		Coef	P-value	Erreur standard	Breusch-Godfrey (P-value)	AIC	Coef	P-value	Erreur standard	Breusch-Godfrey (P-value)	AIC
DIA ARMA(1,1)	μ	- 0.0146	0.344	0.015	0.6814	15766.384	-	-	-	0.050208	15765.42
	Θ	0.2534	0.001	0.076			0.2497	0.001	0.075		
	$\emptyset$	- 0.3327	0.000	0.072			-0.329	0.000	0.071		
	sigma2	1.3039	0.000	0.011			1.3042	0.000	0.011		
DIA ARMA(2,3)	μ	- 0.0124	0.421	0.015	0.6288	15749.9	-	-	-	0.031632	15748.92
	θ_1	- 0.7268	0.000	0.010			-0.727	0.000	0.007		
	θ_2	- 0.9771	0.000	0.010			-0.985	0.000	0.007		
	$\emptyset_1$	0.6485	0.000	0.013			0.6492	0.000	0.011		
	$\emptyset_2$	0.9128	0.000	0.012			0.922	0.000	0.01		
	$\emptyset_3$	- 0.0679	0.000	0.009			-0.067	0.000	0.008		
	sigma2	1.3113	0.000	0.011			1.2998	0.000	0.011		

L'ACF et le PACF du Energy Select Sector SPDR Fund (**XLE**) suggèrent un ARMA (1,1) avec un AIC de 19996,02 tandis que la recherche par itération pour détecter l'ordre du modèle avec le plus petit critère d'information AIC montre plutôt un ARMA (2,4) avec un AIC qui fait 19982,09. Les coefficients du modèle suggéré par l'ACF et le PACF bien que satisfaisants, affichent des résidus autocorrélés avec un p-value du test de Breusch-Godfrey inférieur à 0.05. Le choix final est alors porté sur ARMA (2,4) dont les résultats de l'estimation dans le tableau ci-dessous. Encore une fois la constante n'est pas significative au seuil de 5% que je décide encore de garder pour éviter le problème d'autocorrélation dans les résidus. Au-

delà de la non significativité des résidus, l'ensemble des coefficients du modèle sont significatifs. Ce modèle présente le plus petit critère d'information AIC qui fait 19982.09. Avec un p-value de $0.14 > 0.05$, le test de Breusch-Godfrey a permis d'accepter le fait que les résidus issus de ce modèle ne sont pas autorrélés. Ce modèle est ainsi retenu comme le modèle qui fera objet de moyenne conditionnelle.

TABLEAU 7: ARMA (2,4) DU ENERGY SELECT SECTOR SPDR FUND (XLE)

		Coef	P-value	Erreur standard	Breusch-Godfrey (P-value)	AIC
ARMA (2,4) Energy Select Sector SPDR Fund (XLE)	μ	-0.0047	0.842	0.024	0.140122	19982.091
	θ_1	-0.7182	0.000	0.014		
	θ_2	-0.9675	0.000	0.014		
	ϕ_1	0.6757	0.000	0.016		
	ϕ_2	0.8831	0.000	0.015		
	ϕ_3	-0.065	0.000	0.009		
	ϕ_4	-0.0492	0.000	0.007		
	Sigma2	2.9861	0.000	0.022		

En résumé ARMA (3,3) est trouvé comme l'équation de la moyenne conditionnelle des rendements du SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY), ARMA (2,3) l'équation de la moyenne conditionnelle du SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (DIA), et ARMA (2,4) l'équation de la moyenne conditionnelle du Energy Select Sector SPDR Fund (XLE).

5.3 Modèles de volatilité de type GARCH

Les résidus issus des modèles ARMA serviront à construire les modèles de volatilité GARCH qui constituent le nœud de cette recherche. Il est judicieux de vérifier s'il y a un effet ARCH dans les résidus obtenus du modèle ARMA par les tests appropriés. Si l'effet ACH se confirme, alors les carrés des résidus peuvent aider à modéliser et prédire la volatilité. Pour ce faire je retiens trois distributions de probabilité que pourrait éventuellement suivre les résidus des différents modèles de type GARCH aussi longtemps que

la méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance requière la connaissance de la distribution des résidus. L'idée ici est de savoir la distribution de probabilité que pourrait suivre le plus fidèlement possible les résidus dans les modèles de type GARCH. La première distribution ici est la normale. L'analyse des rendements des 3 ETF montrent que leurs rendements ne suivent pas une distribution normale et en plus du fait que les données financières affichent souvent des excès de kurtosis et un skewness différent de 0 selon la littérature, je trouve légitime de supposer deux autres distributions à savoir la distribution de student et le Generalized error distribution (GED).

Pour la suite de la présentation des résultats, pour chacun des ETF, trois modèles de type GARCH est utilisé à savoir le GARCH simple de *Bollerslev (1986)*, le GJR-GARCH de *Glosten, Jagannathan, et Runkle (1993)* et le EGARCH de *Nelson Daniel (1991)* selon les trois distributions de probabilité (distribution normale, la distribution de student et le Generalized error distribution (GED)) sur la base des résidus des modèles ARMA.

5.3.1 Tests d'effet ARCH

Le but est de vérifier si les résidus carrés pourraient contribuer ou en d'autres termes s'il y a une relation fonctionnelle entre les résidus carrés passés et la volatilité. Deux tests seront conduits pour déterminer une possibilité d'effet ARCH dans les résidus issus des modèles ARIMA à savoir le test d'effet ARCH proposé par Robert Engle (1982) et le test de ratio de la variance de Andrew W. Lo et A. Craig MacKinlay (1988).

TABLEAU 8: TESTS D'EFFET ARCH : TEST DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
ET TEST DE RATIO DE LA VARIANCE

	Test LM suivant khi-deux		Test LM suivant F		Test de ratio de la variance	
	Statistique	p-value	Statistique	p-value	Statistique	p-value
SPY	1293.884	1.35E-277	346.965	1.326072E-320	-3.847	0.000
DIA	1181.875	2.48E-253	307.806	1.59E-288	-3.636	0.000
XLE	812.912	1.86E-173	193.377	4.31E-189	-2.459	0.014

Les p-values du test du multiplicateur de lagrange de Engle sont tous inférieurs à 0.05 ce qui me donne raison de rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle il n'y a pas d'autocorrélation entre le carré des résidus et par ricochet accepter le fait que les résidus carrés sont corrélés. Pour confirmer ce résultat, j'ai utilisé le test du ratio de la variance qui test la marche aléatoire de la série. Les p-values de ce test aussi

étant tous inférieurs à 0.05 pour l'ensemble des actifs étudiés, me donnent raison de rejeter l'hypothèse nulle que les résidus carrés suivent un processus de marche aléatoire et d'accepter l'hypothèse alternative confirmant l'effet ARCH dans les résidus.

En raison de l'autocorrélation des résidus carrés confirmé par le test du multiplicateur de lagrange ainsi que le rejet de l'hypothèse de marche aléatoire que pourrait suivre ces résidus carrés avec le test de ratio de la variance, l'usage des modèles de type GARCH pour la modélisation et la prévision de la volatilité de ces actifs est justifié.

5.3.2 Estimation des modèles de type GARCH

Pour chaque actif, je choisis la combinaison p et q qui minimise le critère d'information AIC des différents modèles. Ces modèles retenus d'ordre p et q seront estimés sur la base de trois distributions de probabilité à savoir **la distribution normale, celle de student, et finalement le Generalized error distribution (GED)**. La distribution qui donne le plus petit AIC et des coefficients les plus significatifs sera le modèle qui sera finalement retenu pour la distribution en question. Par la suite, les modèles de même nature mais estimés avec des distributions de probabilité différente seront comparés pour retenir la distribution qui décrit au mieux les données. Et c'est finalement ces modèles sous la distribution finale qui sera choisi comme modèle d'estimation de la volatilité. Dans un premier temps seront présentés les résultats préliminaires qui vont être les estimations de chaque modèle de chaque actif selon chaque distribution. Dans un deuxième temps les modèles des actifs selon la (les) distributions choisis seront présentés et le test d'autocorrélation de leurs résidus va se faire ainsi que le graphique qqplot pour confirmer la distribution de probabilité des résidus. Dans ce travail la persistance dans la volatilité sera expliquée par la construction du modèle Fi-GARCH.

Pour pouvoir faire la prévision sur une période plus ou moins longue, l'approche de prévision glissante est adoptée dans ce document. Cela consiste à estimer le modèle de volatilité, et prendre la volatilité prévue par le modèle comme donnée pour la prochaine prévision et ainsi de suite.

Pour chaque actif, les modèles de type GARCH seront estimés. Le principe est que pour chaque estimation, les p -values des coefficients du modèle avec le plus petit AIC seront testés pour juger de leur significativité. Un modèle avec un p -value non significatif sera écarté et le prochain modèle sera estimé et ainsi de suite tout en suivant l'ordre du critère d'information AIC jusqu'à trouver le modèle retenu.

5.3.3 SPY

5.3.3.1 Generalize error distribution

5.3.3.1.1 GARCH

Le plus petit AIC pour cette distribution du modèle GARCH est de 13589.52 dont l'ordre est de 2 pour p et 2 pour q soit GARCH (2,2). Les coefficients alpha 0, alpha 1, alpha 2, bêta 1, et bêta 2 estimés du modèle dont les valeurs suivent respectueusement avec leur p-value dans les parenthèses de 0.0288 (5.366e-05), 0.0693 (2.335e-04), 0.1333 (6.122e-05), 0.4147 (0.162), 0.3691 (0.162). De ces coefficients, nous pouvons clairement remarquer la non significativité des coefficients bêta du modèle. Ce modèle est donc écarté pour estimer le suivant d'ordre GARCH (2,1) avec un AIC de 13589.57 dont les coefficients ainsi que les p-values respectifs de 0.0219 (1.307e-05), 0.0685 (1.773e-04), 0.8390 (0.000). Ce dernier modèle GARCH (2,1) paraît tout à fait plus acceptable dans la mesure où tous les coefficients sont significatifs au seuil de 5%. Le test d'autocorrélation des résidus du modèle GARCH (2,1) se fera plus tard pour vérifier leurs probable autocorrélation.

5.3.3.1.2 GJR-GARCH

Comme fait précédemment pour le modèle GARCH, je recherche également le modèle GJR-GARCH dont le critère AIC est le plus faible possible et dont tous les coefficients sont significatifs au seuil de 5%. Dans cette suite logique, le modèle présentant le plus petit AIC est bien évidemment le GJR-GARCH (2,1) avec son AIC de 13457.02 avec les valeurs et p-value des coefficients alpha 0 à alpha 2 et de bêta 1 respectivement de 0.0211 (4.699e-07), 0.1844 (1.824e-07), 0.0195 (0.601), -0.1844 (3.388e-13), 0.8638 (0.000). Le coefficient alpha 2 n'est pas significatif dans ce modèle GJR-GARCH au seuil de 5% ($0.601 > 0.05$ ce qui donne raison à extraire du modèle ce coefficient). Le prochain modèle avec le plus petit AIC après avoir exclu le modèle précédent est le GJR-GARCH (3,1). Bien sûr que ce ne sera pas le meilleur modèle simplement parce que si alpha 2 n'est pas significatif dans GJR-GARCH cela signifie que seul un seul retard est expliqué par la partie ARCH et la logique sera que le modèle final aura forcément un seul retard pour la partie ARCH. Ces deux coefficients de la partie ARCH du modèle sont toujours non significatifs alpha2 $7.6791e-03$ ($0.841 > 0.05$) et alpha3 0.0126 ($0.589 > 0.05$) ce qui confirme ce qui devrait se passer. De ce fait, ce modèle est bien aussi écarté pour laisser place au prochain le GJR-GARCH (2,1). Ce dernier modèle est ce qui est retenu finalement pour cette distribution dont les coefficients et p-value de 0.0198 ($1.556e-08 < 0.05$), 0.1913 ($6.970e-19 < 0.05$), -0.1913 ($2.048e-17 < 0.05$), 0.8795 ($0.000 < 0.05$) respectivement de alpha0, alpha1, gamma et bêta 1. Tous ces coefficients sont significatifs au seuil de 5%.

5.3.3.1.3 EGARCH

Pour ce modèle le plus petit critère d'information en termes de valeur est de 13417.8 ce qui correspond à un EGARCH (3,3). Les coefficients α_1 5.8798×10^{-3} ($0.88 > 0.05$) et β_2 4.4348×10^{-17} ($1.000 > 0.05$) du modèle sont non significatifs au seuil de 5%. Ce modèle est donc écarté pour laisser place au prochain avec le critère d'information AIC le plus faible. Ce processus est répété pour les modèles EGARCH (2,3), EGARCH (2,2), EGARCH (3,2), EGARCH (2,1), EGARCH (3,1) qui sont également écartés et le modèle finalement retenu est le EGARCH (1,1) avec les coefficients et p-value 5.5976×10^{-3} ($6.927 \times 10^{-2} < 0.05$), 0.1647 ($2.786 \times 10^{-26} < 0.05$), 0.1442 (1.294×10^{-26}), 0.9731 ($0.000 < 0.05$) respectivement de α_0 , γ , α_1 et β_1 . Pour EGARCH de la distribution Generalized error distribution (GED), le modèle EGARCH (1,1) est retenu comme le modèle de volatilité idéal.

5.3.3.2 Distribution de student

Comme précédemment effectué avec la distribution Generalized error distribution, je vais estimer les coefficients des modèles GARCH en supposant que les résidus des modèles suivent la distribution de student. Ci-dessous les résultats de chaque estimation selon cette distribution pour chaque modèle.

5.3.3.2.1 GARCH

Pour la distribution de student le plus petit AIC est de 13596.05 ce qui correspond à un GARCH (2,1). Les valeurs estimées des coefficients de ce modèle ainsi que leur p-value dans les parenthèses sont de 0.018 (7.319×10^{-5}), 0.0602 (3.547×10^{-4}), 0.0917 (1.536×10^{-4}), 0.8455 (0.000) respectivement de α_0 , α_1 , α_2 et β_1 . Les valeurs des p-values de ces coefficients ne me donnent pas assez de raison pour rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les coefficients en question sont égales à zéro dans la mesure où ces p-values sont inférieure à 0.05. De ce fait les coefficients de ce modèle sont significatifs au seuil de 5%. Ce modèle est donc retenu comme le modèle GARCH qui va capturer la volatilité de l'actif SPY si on suppose que les résidus du modèle suivent une distribution de student.

5.3.3.2.2 GJR-GARCH

Pour en venir au modèle GJR-GARCH, le même raisonnement est utilisé. Le critère d'information AIC le plus faible en termes de valeur est de 13458.17 correspondants à un GJR-GARCH (2,1). L'estimation montre que le coefficient α_2 qui se trouve être est le coefficient du second retard de la partie ARCH du modèle n'est pas significatif présentant un p-value de 0.577. L'ensemble des coefficients sont significatifs

à l'exception de α_2 . La logique d'estimation du prochain modèle est que si α_2 n'est pas significatif au seuil de 5%, α_3 ne le sera pas non plus et pas d'intérêt à estimer le modèle suivant qui le GJR-GARCH (3,1) ou GJR-GARCH (2,2). A ce niveau ces modèles sont écartés de la liste. Le prochain modèle GJR-GARCH (1,1) avec un critère d'information AIC de 13609.9. Les coefficients de ce modèle sont de 0.0174 (2.071 e-07), 0.1894 (5.737 e-17), -0.1894 (5.099 e-16), 0.8851 (0.000) qui sont les valeurs encore une fois de α_0 , α_1 , γ et β_1 ainsi que leur p-value correspondant dans les parenthèses respectivement. Ces coefficients trouvés sont tous significatif au seuil de 5% ce qui me donne raison de le garder pour la distribution de student pour l'ETF SPY.

5.3.3.2.3 EGARCH

Le modèle EGARCH de cette distribution qui présente le plus faible AIC de 13444.7 est le EGARCH (3,3). L'estimation de ce modèle donne des coefficients α_0 , α_1 et β_2 qui ne sont pas significatif. Le modèle suivant avec le plus petit AIC après avoir écarté le EGARCH (3,3) est le EGARCH (2,3) qui conduit également à la même conclusion que le premier dans la mesure où les coefficients qui n'étaient pas significatif dans le premier demeurent non significatif dans ce modèle également. J'ai continué ce processus en respectant l'ordre du critère d'information AIC dans un ordre croissant. Le modèle dont les coefficients son significatif au seuil de 5% est donc le EGARCH (1,1) dont les coefficients et p-values sont respectivement de -3.7826e-03 (0.141), 0.1594 (1.743e-24), 0.1414(1.625e-26) 0.9768 (0.000) pour α_0 , α_1 , γ et β_1 . α_0 est certes non significatif toutefois la valeur très faible n'aura pas d'incidence sur la qualité du modèle que je décide de conserver dans le modèle.

5.3.3.3 Distribution normale

Même si d'office la probabilité pour que les résidus du modèle des variables financière pourraient ne pas être normalement distribués, il est cependant nécessaire d'estimer les coefficients des différents modèles pour confirmer ou non cette situation. Ce faisant, je procède de la même façon comme effectuer précédemment avec les deux premières distributions.

5.3.3.3.1 GARCH

Si on suppose que les résidus du modèle suivent une distribution normale et que l'estimation des coefficients se fait sur base de cette distribution, le modèle avec le plus faible critère AIC est donc le GARCH (2,2). Le coefficient β_1 de ce modèle n'est pas significatif au seuil de 5% avec son p-value de

0.435. Tous les modèles qui suivent successivement ce modèle c'est-à-dire d'ordre (3,2) avec AIC de 13841.93 et (2,3) avec AIC de 13842.24 en considérant du plus petit au plus grand AIC sont écartés simplement parce que la limite en termes de coefficient de la partie GARCH doit forcément être inférieure à 2 soit 1 ou 0 qui sera un modèle ARCH. Le modèle suivant dans notre liste est le GARCH (2,1) avec AIC de 13843.17. Ce modèle est significatif au seuil de 5% pour l'ensemble des coefficients du modèle. Les valeurs des coefficients α_0 , α_1 , β_1 et leurs p-values correspondant sont respectivement de 0.027 (3.001e-05), 0.0777 (4.116 e-04), 0.0640 (1.549e-02), 0.8393 (0.000). Pour la distribution normale, le modèle de volatilité du SPY pour un modèle GARCH est le GARCH (2,1).

5.3.3.3.2 GJR-GARCH

Une fois encore on commence avec le modèle avec le plus petit AIC de 13649.23 qui est le GJR-GARCH (2,1). Le coefficient α_2 de ce modèle est non significatif 0.0135 (0.733<0.05) au seuil de 5%. Intuitivement tous les modèles avec un retard de la partie ARCH supérieur ou égal à deux doit conduire à certains coefficients qui ne seront pas significatifs ce qui est confirmé avec GJR-GARCH (3,1) où α_1 et α_2 sont non significatifs pour des valeurs respectives de 8.5353e-10 (1.00>0.05) et 0.0150 (0.498>0.05). Le modèle suivant disposant du critère d'information le plus faible après exclusion des trois premiers modèles est le GJR-GARCH (1,1). Les résultats de l'estimation de ces coefficients α_0 , α_1 , γ , β_1 sont respectivement de 0.0239 (1.210e-08), 0.1876 (2.551 e-18), -0.1876 (7.812 e-17), 0.8795 (0.000). Ces valeurs sont tous significatifs au seuil de 5% pour l'ensemble des coefficients.

5.3.3.3.3 EGARCH

Pour commencer, le modèle EGARCH (2,2) présentant un AIC de 13611.9 est estimé en raison du fait qu'il s'agit du modèle avec le plus petit AIC. L'estimation du modèle montre que le coefficient de la partie GARCH c'est-à-dire les coefficients β sont significatifs au seuil de 5% tandis que le premier coefficient de la partie ARCH ou α_1 est non significatif au seuil de 5% de même que la constante α_0 . Cet état de la situation me conduit à abandonner ce modèle de la liste et d'estimer le prochain jusqu'à trouver l'idéal. Dans cet optique, les 5 premiers modèles qui suivent ont eux aussi des coefficients non significatifs.

Ceci est tout à fait correct en raison du fait que le nombre de retard de la partie ARCH de ces modèles sont supérieurs ou égale à 2 alors que dans l'estimation du premier modèle on avait remarqué qu'à 2 retards de la partie ARCH un coefficient peut être supprimé.

Le modèle retenu pour une distribution normale pour le modèle de volatilité EGARCH du SPY est donc le EGARCH (1,1) avec les coefficients α_0 , α_1 , γ , et β_1 respectifs de $-1.7447e-3$ (0.586), 0.1642 (1.984 e-23), 0.1455 (9.219 e-24), 0.9666(0.000) qui sont tous significatifs au seuil de 5%.

Globalement la distribution Generalized error distribution (GED) est bien évidemment celle dont les résidus des modèles de type GARCH suivent le plus. La raison est que de ces résultats ci-dessus présentés, sur la base du critère d'information AIC mis à part l'estimation du modèle GARCH où on remarque que la distribution de student présente un AIC plus faible.

5.3.4 DIA

Pour L'ETF précédent, j'ai présenté les résultats des estimations des différents modèles de types GARCH selon chaque distribution de probabilité, et la distribution retenue pour estimer l'ETF SPY SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY) est le generalized error distribution (GED). Le même processus sera répété pour le DIA SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust (**DIA**).

5.3.4.1 *Generalized error distribution*

5.3.4.1.1 **GARCH**

Le modèle GARCH du DIA estimé selon la distribution de Generalized error distribution (GED) disposant un AIC de 13085.98, est le GARCH (2,1). Dans la classe des itérations possible, ce modèle est celui qui présente le critère d'information le plus faible. L'estimation de ce modèle dont les coefficients α_0 , α_1 , α_2 , et β_1 ainsi que leur p-value correspondant dans les parenthèses sont respectivement de 0.02 (3.245 e-06), 0.0766 (1.011 e-04), 0.0738 (2.958 e-03), 0.8393 (0.000). Les p-values de ces coefficients montrent effectivement qu'il y a matière à rejeter l'hypothèse selon laquelle ces coefficients soient retirés du modèle. Ce modèle est significatif au seuil de 5%. De ce fait le modèle GARCH (2,1) de critère d'information AIC 13085.98 est le modèle retenu si on suppose que les résidus suivent la distribution du Generalized error distribution (GED).

5.3.4.1.2 **GJR-GARCH**

Pour la même distribution du Generalized error distribution (GED) le modèle GJR-GARCH est estimé pour l'ETF DIA. Le modèle disposant du plus petit AIC de 12939.21 est le GJR-GARCH (1,1). Les coefficients estimés de ce modèle sont de 0.0192 (2.794e-11) 0.0282 (4.719e-21), - 0.2082 (3.963e-21), 0.8801 (0.000)

respectueusement pour α_0 , α_1 , γ , α_2 , et β_1 . Les valeurs des p-values de ces coefficients ne me donnent pas assez de raison pour rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les coefficients en question sont égales à zéro dans la mesure où ces p-values sont inférieures à 0.05. De ce fait les coefficients de ce modèle sont significatifs au seuil de 5%. Ce modèle est donc retenu comme le modèle qui sera prise en compte pour la suite de ce document.

5.3.4.1.3 EGARCH

Ce modèle tout comme le précédent permet de capturer l'effet asymétrique de la volatilité. Je continue avec la même approche pour trouver le modèle EGARCH qui aura le plus petit critère d'information AIC et dont tous les coefficients seront significatifs au seuil de 5% choisi pour ce document. Le modèle EGARCH (2,2) est celui qui dispose du plus petit AIC d'une valeur de 12911.8. Bien que l'AIC du modèle soit le plus petit, les coefficients ne sont cependant pas tous significatifs à l'instar de α_0 , α_1 et β_1 . Pour la suite, le modèle qui suit est le EGARCH (2,1) dont les coefficients également ne sont pas significatifs. Ces deux premiers modèles sont écartés pour laisser place au suivant le EGARCH (1,1). Les coefficients sont significatifs pour ce modèle exception faite à α_0 dont la valeur est tout de même trop faible. Les coefficients du modèle EGARCH (1,1) sont respectivement de 2.7978e-04 (0.911), 0.1671 (4.235e-26), 0.1505 (6.806 e-33), 0.9700 (0.000). Pour α_0 , α_1 , γ et β_1 . Ce modèle EGARCH (1,1) est retenu pour cette distribution aussi longtemps que ces coefficients sont significatifs au seuil de 5%.

5.3.4.2 Distribution de students

5.3.4.2.1 GARCH

Pour la distribution de student le modèle avec le plus petit AIC est le GARCH (2,1) avec son critère d'information de 13096.03. Les coefficients estimés de ce modèle sont tous significatifs au seuil de 5%. Les valeurs estimées de ces coefficients sont respectivement de 0.0169 (1.634 e-05), 0.069 (2.378 e-04), 0.083 (8.033 e-004), 0.8448 (0.000) pour α_0 , α_1 , α_2 , et β_1 . La significativité de ces coefficients est justifiée avec les p-values inférieures à 0.05 traduisant la non existence de raison suffisante pour rejeter l'hypothèse nulle. Le modèle GARCH selon la distribution de student est le GARCH (2,1).

5.3.4.2.2 GJR GARCH

Pour en venir à l'estimation du modèle GJR GARCH selon la distribution de student, le modèle avec le critère d'information AIC d'une valeur de 12956.3 est celui avec le plus petit AIC qui correspond à GARCH

(2,1). Les valeurs estimées des coefficients de ce modèle sont de 0.0171 (1.812e-10), 0.2071 (8.891 e-21), -0.2071 (4.286 e-21), 0.8844 (0.000) respectivement de α_0 , α_1 , α_2 , γ , et β_1 . Les p-values de ces coefficients sont tous inférieure à 0.05 ce qui ne donne pas suffisamment de raison pour rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les coefficients de ce modèle n'existent pas en les supposant nul. Les coefficients sont tous significatifs au seuil de 5% faisant valider ce modèle GJR-GARCH (1,1) selon la distribution de student.

5.3.4.2.3 EGARCH

En ce qui concerne le EGARCH selon la distribution de student, le modèle avec le plus petit AIC de 12908.85 est le EGARCH (2,2) avec des coefficients qui ne sont pas tous significatifs même si le modèle a le critère d'information AIC le plus faible. Bien que les retards dans ce modèle permettent d'avoir un AIC plus petit, cela n'est pas suffisant pour prendre en compte ce modèle en raison de p-values beaucoup trop grand par rapport à 0.05 comme seuil choisi dans ce document. Le prochain modèle estimé est le EGARCH (2,1) où les coefficients α_0 et α_1 ne sont pas significatifs. L'idée ici est que tout ordre ou retard supérieur ou égale à 2 engendrera des coefficients non significatifs pour ce modèle. Ce raisonnement est confirmé par la grille de recherche des critères d'information AIC où le prochain modèle dans la liste est le EGARCH (1,1) dont le critère d'information AIC vaut 12940. Les coefficients de ce dernier modèle sont de 1.5605e-03 qui vaut pratiquement zéro (0.536), 0.1638 (2.977e-27), 0.1492 (2.049e-34), 0.9743 (0.000) respectivement pour α_0 , α_1 , γ , et β_1 .

5.3.4.3 Distribution normale

5.3.4.3.1 GARCH

Pour la distribution normale le modèle GARCH disposant du plus petit AIC est le GARCH (2,1) avec un critère d'information de 13336.51. La bonne nouvelle est que tous les coefficients de ce premier modèle estimés sont tous significatifs au seuil de 5% la situation la plus souhaitable possible. Les valeurs estimées de ces coefficients ainsi que leur p-value sont respectivement de 0.0245 (9.939e-06), 0.0843 (2.097e-04), 0.0567 (3.676e-02) 0.8405 (0.000) pour α_0 , α_1 , α_2 et β_1 . Les valeurs des p-values dans les parenthèses font que je n'ai pas suffisamment de raison pour rejeter l'hypothèse nulle selon lequel ces valeurs sont égales à zéro. La significativité des coefficients ainsi que la valeur faible du critère d'information AIC fait que ce modèle GARCH (2,1) doit être retenu comme modèle GARCH du DIA selon la distribution normale.

5.3.4.3.2 GJR-GARCH

Le critère d'information AIC le plus faible ici est le 13125.03 ce qui correspond au GJR-GARCH (1,1). Pour l'estimation du modèle, les coefficients ainsi que les p-values sont respectivement de 0.2221 (1.598e-10), 0.2066 (7.542e-20), -0.2066(2.842e-19), 0.8764 (0.000). Les coefficients. Tout comme observé précédemment, le modèle GJR-GARCH suggéré en premier par le critère d'information AIC est donc le meilleur et qui sera retenu. Les p-values des coefficients sont tous inférieurs à 0.05 ce qui justifie la significativité de ces coefficients. A cet effet, le GJR-GARCH (1,1) est donc le modèle GJR-GARCH retenu pour modéliser la volatilité de l'ETF DIA si on suppose que les résidus de ce modèle suivent une distribution normale.

5.3.4.3.3 EGARCH

En ce qui concerne ce modèle, le plus faible AIC correspond au modèle EGARCH (2,2) avec un critère d'information de 13091.56. Les valeurs estimées des coefficients du modèle sont telles que α_0 , α_1 et β_2 ne sont pas significatifs au seuil de 5%. Afin de trouver le modèle idéal, celui-ci est donc écarté et le prochain sur notre liste est le EGARCH (2,1). Ce dernier modèle est proche de l'objectif mais présente également des coefficients tels que α_0 et α_1 qui sont tout de même non significatifs.

Finalement le EGARCH (1,1) est choisis pour la modélisation de la volatilité de l'ETF DIA si on tient compte de l'asymétrie avec le modèle EGARCH dont le coefficient EGARCH est nul. Les coefficients ainsi que les p-values sont respectivement de 0.1695 (1.384e-22), 0.1510 (4.376e-28), 0.9660 (0.000).

5.3.5 XLE

5.3.5.1 Generalized error distribution (GED)

5.3.5.1.1 GARCH

Le modèle GARCH de l'ETF XLE estimé selon la distribution de Generalized error distribution (GED) disposant un AIC de 18072.05, est le GARCH (1,1). Dans la classe des itérations possible, ce modèle est celui qui présente le critère d'information le plus faible. L'estimation de ce modèle dont les coefficients α_0 , α_1 , et β_1 ainsi que leur p-value correspondant dans les parenthèses sont respectivement de 0.0240 (0.000), 0.0790 (0.000), 0.9142 (0.000). Ces valeurs des p-valeurs dans les parenthèses montrent bien évidemment que je n'ai pas suffisamment de raison pour accepter l'hypothèse nulle selon laquelle ces

valeurs doivent être retirées du modèle. Ce modèle GARCH (1,1) est celui retenu pour la modélisation en faisant usage du modèle GARCH selon la Generalized error distribution.

5.3.5.1.2 GJR-GARCH

Le modèle GJR-GARCH dont le critère AIC est le plus faible possible et dont tous les coefficients sont significatifs au seuil de 5%. Dans cette suite logique, le modèle présentant le plus petit AIC est bien évidemment le GJR-GARCH (2,2) avec son AIC de 18017.05 dont les valeurs estimées des coefficients ne sont pas tous significatif au seuil de 5%. Le processus de choix du modèle continu pour trouver le modèle idéal. Pour cela les modèles sont priorisés en fonction de la petitesse de la valeur de leurs critères d'information AIC. Le modèle GJR-GARCH (1,1) présente les coefficients significatifs au seuil de 5%. Les coefficients α_0 , α_1 , γ , β_1 du modèle sont respectueusement de 0.0309 (0.000), 0.1071 (0.000), 0.0863 (0.000), 0.9232 (0.000).

Ce modèle GJR-GARCH (1,1) est retenu si je suppose que les résidus du modèle GJR-GARCH du XLE suivent la generalized error distribution.

5.3.5.1.3 EGARCH

Pour ce qui concerne ce modèle, la recherche de son ordre avec le plus petit critère d'information AIC est le EGARCH (2,2). Les coefficients estimés α_0 , α_1 , α_2 , γ , β_1 et β_2 ainsi que les p-valeurs sont respectivement de 0.0202 (0.000), 0.0923 (0.000), 0.1110 (0.000), 0.1008 (0.000), 0.5372 (0.000), 0.4392 (0.000). Ces p-values montrent que les coefficients sont significatifs au seuil de 5% rendant valide ce modèle EGARCH (2,2) avec un AIC de 18008.8 pour modéliser la volatilité du XLE si on suppose que les résidus du modèle suivent la distribution GED.

5.3.5.2 Distribution de student

5.3.5.2.1 GARCH

Si on suppose que les résidus du modèle GARCH du XLE suivent une distribution de student, le modèle GARCH (1,1) retenu est celui correspondant au critère d'information AIC de 18052.21. Tout ordre supérieur présente des coefficients non significatifs et des critères d'information trop grand. Les valeurs des coefficients α_0 , α_1 , et β_1 ainsi que les p-values sont respectivement de 0.0217 (0.000), 0.0746 (0.000), 0.9193 (0.000). Ces p-values permettent de valider que ces coefficients sont significatifs au seuil de 5%.

5.3.5.2.2 GJR-GARCH

Selon le modèle GJR-GARCH, on suppose ici que les résidus suivent une distribution de student. Ce faisant, on cherche encore le modèle avec le plus petit critère d'information AIC. Dans cette recherche, le modèle GJR-GARCH (2,3) est celui présentant un critère d'information le plus faible d'une valeur de 17999.7. Les coefficients β_2 et β_3 de ce modèle sont non significatifs au seuil de 5% ce qui voudra dire que le maximum d'ordre significatif des coefficients β se limite à un. Pour cela le modèle GJR-GARCH (2,1) est estimé et le coefficient α_2 dans ce cas est aussi non significatif. Ces deux premiers modèles sont donc exclus pour laisser place au prochain le GJR-GARCH (1,1) avec un critère d'information AICI de 18003.8. Les valeurs estimées des coefficients α_0 , α_1 , γ , et β_1 sont respectivement de 0.0271 (0.000), 0.1003 (0.000), -0.0781 (0.000), 0.9262 (0.000). Ce modèle GJR-GARCH (1,1) sera pris en compte pour la suite du travail.

5.3.5.2.3 EGARCH

Le modèle EGARCH est lui aussi estimé pour le XLE en supposant que ses résidus suivent une distribution de student. Le plus petit AIC de 17992.7 correspond au modèle EGARCH (2,2). Vu que c'est le modèle avec le plus petit critère d'information en termes de valeur, il est donc estimé. Les coefficients estimés α_0 , α_1 , α_2 , γ , β_1 et β_2 sont respectivement de 0.0187 (0.000), 0.0858 (0.000), 0.1158 (0.000), 0.0971 (0.000), 0.5180 (0.000), 0.4603 (0.000). Ces p-values significatifs permettent de valider la significativité des coefficients de ce modèle. Le modèle EGARCH (2,2) est alors celui qui sera retenu pour le XLE suivant la distribution de student.

5.3.5.3 Distribution normale

5.3.5.3.1 GARCH

Encore une fois nous allons supposer que les résidus du modèle suivent une distribution normale et dans ce cas, je recherche le modèle qui a le critère d'information le plus faible. A ce sujet, le modèle avec le critère d'information AIC de 18156.8 est le plus petit correspondant au GARCH (2,3). L'estimation de ce modèle donne des coefficients non significatifs ce qui fait que je l'écarte pour choisir le modèle qui suit selon la

valeur du critère d'information AIC. Ce modèle choisi dans ce cas est le GARCH (1,1) avec un AIC de 18156.9.

Les valeurs estimées de ses coefficients α_0 , α_1 , β_1 sont respectivement de 0.0268 (0.000), 0.0827 (0.000), 0.9098 (0.000). Les valeurs des p-values me font valider le fait que les coefficients sont significatifs au seuils 5%. Ce modèle GARCH (1,1) est retenu comme le modèle GARCH qui permettra d'estimer la volatilité du XLE si on suppose que les résidus suivent une distribution normale.

5.3.5.3.2 GJR-GARCH

Comme nous le savons déjà, ce modèle permet de capturer l'asymétrie dans la volatilité en se posant la question à savoir à quel degré les chocs négatifs affectent la volatilité par rapport aux chocs positifs de même amplitude. Comme procédé pour les modèles et les distributions déjà présentés, le modèle avec le plus petit critère d'information AIC dont les coefficients seront significatifs sera retenu comme modèle pour l'estimation et fera partie des modèles qui participeront au choix final. Tout d'abord je recherche l'ordre du modèle qui minimise le critère d'information AIC. Le résultat à ceci montre que le plus faible critère d'information AIC en termes de valeur est de 18082.3 correspondant au modèle GJR-GARCH (2,2). Les valeurs estimées de ces coefficients sont pour la majorité significatif au seuil de 5% exception faite du deuxième retard de la partie ARCH c'est-à-dire α_2 . Pour résoudre cette situation l'idée serait de retirer simplement α_2 et de réestimer le modèle mais il est fort de constater que le modèle GJR-GARCH (1,1) présente un critère d'information AIC plus faible par rapport au GJR-GARCH (1,2). De ce fait le modèle GJR-GARCH (1,1) est donc estimé et les coefficients α_0 , α_1 , γ , β_1 sont respectivement de 0.0334 (0.000), 0.1092 (0.000), - 0.0880 (0.000) et 0.9203 (0.000). Les p-values de ces coefficients sont tous inférieure à 0.05 ce qui me permet de valider le fait que ces coefficients sont significatifs au seuil de 5%.

5.3.5.3.3 EGARCH

Pour confirmer l'asymétrie dans la volatilité, un modèle alternatif au modèle GJR-GARCH est souvent adopté dans la littérature, c'est le modèle EGARCH. Pour que les résultats de l'un ou l'autre soient considérés il sera préférable que ces deux modèles présentent des résultats similaires et sera revue dans la partie du choix des modèles finaux. Encore une fois une recherche se fera à savoir le modèle qui présentera le plus petit critère d'information. Le plus petit critère d'information AIC en termes de valeur est de 18073.77 ce qui correspond au modèle EGARCH (2,2). L'estimation de ce modèle donne des coefficients qui sont bien significatifs au seuil de 5%. Les valeurs estimées des coefficients α_0 , α_1 , α_2 ,

gamma, β_1 , et β_2 sont respectivement de 0.0230 (0.000), 0.1016 (0.000), 0.1001 (0.000), 0.1025 (0.000), 0.5624 (0.000), 0.4123 (0.000). Tous les p-values des coefficients étant inférieurs à 0.05, je valide le fait que les coefficients sont significatifs au seuil de 5%. Le modèle EGARCH retenu pour estimer la volatilité du XLE si on suppose que les résidus suivent une distribution normale est donc le EGARCH (2,2).

5.4 Résultat des estimations des modèles de type GARCH retenus

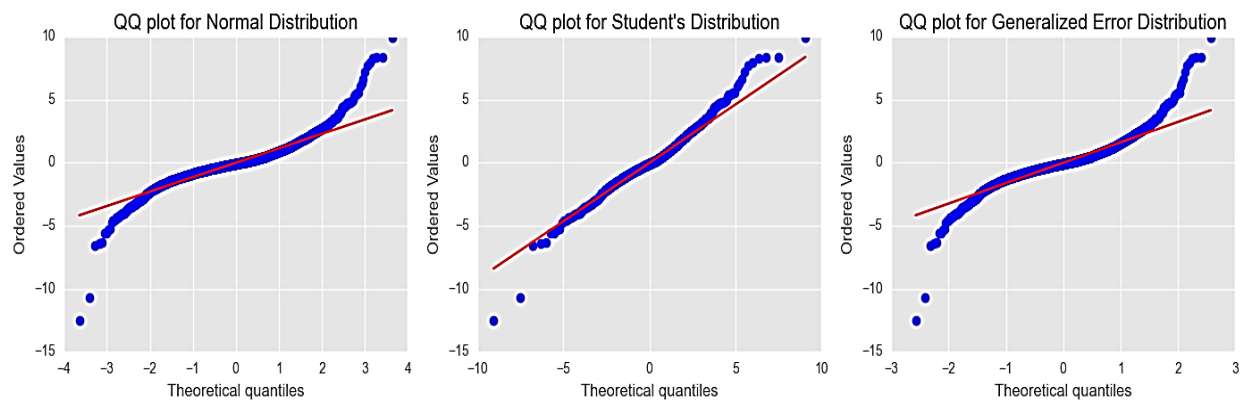
Dans la partie estimation des modèles de type GARCH présentée ci-dessus, on peut remarquer que pour chacune des distributions de probabilité, les trois modèles à savoir GARCH, EGARCH et GJR-GARCH sont estimés pour chaque ETF. Cette partie sera consacrée dans un premier temps à la sélection de la distribution que les résidus de ces modèles décrit le mieux grâce à la comparaison des critères d'information AIC et les graphiques qqplot des résidus selon les trois distributions. Dans un second temps procéder au diagnostic des modèles avec le test de LJUNGBOX et de BOXPIERCE. Finalement discuter de la stationnarité et de la persistance de la volatilité à travers le modèle Fi-GARCH et présenter l'ensemble des modèles finalement choisis ainsi que leurs coefficients estimés selon la distribution de student.

5.4.1 Choix de la distribution de probabilité des modèles

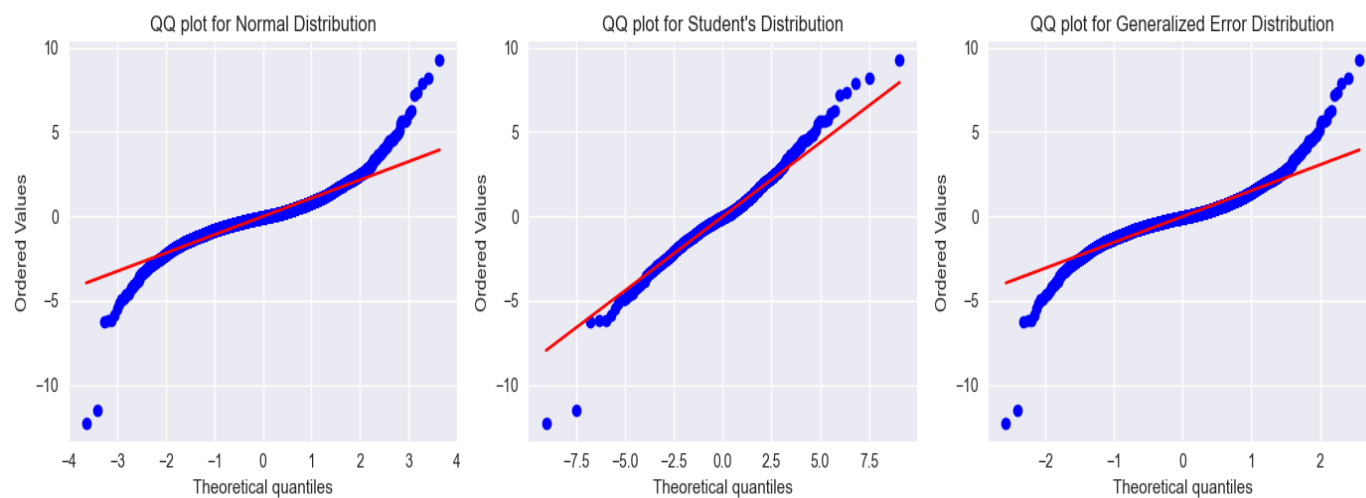
La distribution de probabilité que suit le plus fidèlement possible les résidus des modèles GARCH, GJR-GARCH, et EGARCH des trois ETF (SPY, DIA, et XLE) est la distribution de student. La raison est qu'une comparaison des valeurs des critères d'information AIC entre chaque modèle de même nature selon les trois distributions de chaque actif montre que c'est la distribution qui donne le plus petit AIC.

Pour tous les ETF étudiés dans ce document, parmi les trois distributions, l'ensemble des modèles estimés en supposant que les résidus suivent une distribution de student, présente des critères d'information AIC plus faible par rapport aux deux autres distributions de probabilité. Pour cette raison, la distribution de student est la meilleure pour modéliser leur volatilité avec les modèles GARCH, EGARCH et GJR-GARCH.

Dans l'optique de confirmer la validation de la distribution de student par le critère d'information AIC, les graphiques qqplot sont fait pour chaque ETF afin de voir la distribution de probabilité qui décrit le mieux les résidus des modèles. Nous pouvons observer que les données s'alignent le plus possible de la distribution théorique que quand il s'agit de la distribution de student. La distribution de student est alors retenue comme la distribution que suit les résidus des modèles de volatilité de type GARCH dans ce document ce qui est confirmé par le critère d'information AIC ainsi que les graphiques qqplot ci-dessous.



**FIGURE 4 : QQPLOT POUR LES RESIDUS DES MODELES DE VOLATILITE DU SPY
SUIVANT LES TROIS DISTRIBUTIONS**



**FIGURE 5: QQPLOT POUR LES RESIDUS DES MODELES DE VOLATILITE DU DIA
SUIVANT LES TROIS DISTRIBUTIONS**

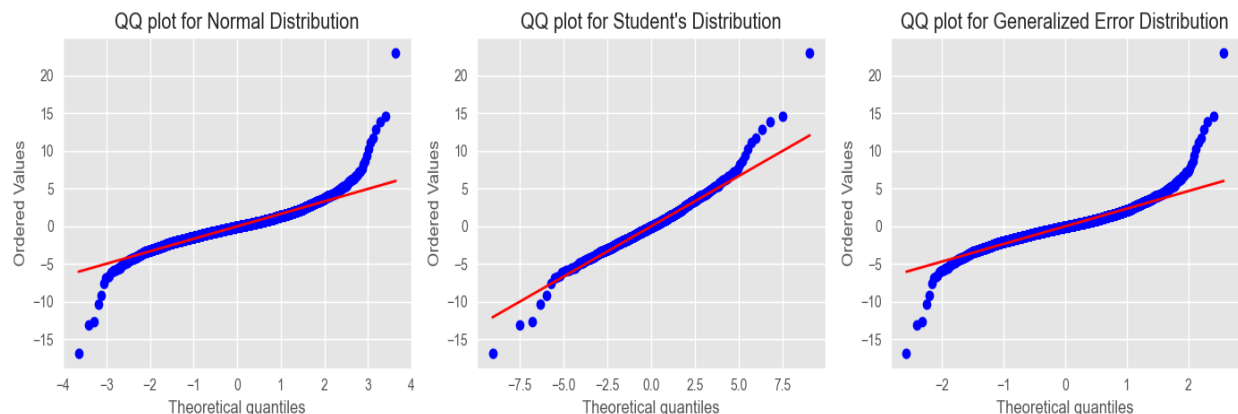


FIGURE 6: QQPLOT POUR LES RESIDUS DES MODELES DE VOLATILITE DU XLE SUIVANT LES TROIS DISTRIBUTIONS

5.5 Test d'autocorrélation des résidus des modèles de volatilité.

A cette étape l'objectif est de savoir si les modèles GARCH estimés sous la distribution de student peuvent être utilisés pour la prévision de la volatilité des ETF choisis pour cette recherche. Pour y arriver, le test d'autocorrélation des résidus est effectué avec le test de LJUNGBOX et de BOXPIERCE. Avant de présenter les résultats de ces tests, il y a lieu de rappeler l'hypothèse nulle qui assume que les résidus des modèles sont indépendants et identiquement distribués. Précisément l'hypothèse nulle teste l'absence d'autocorrélation des résidus. Si les p-values de ces tests sont supérieures à 0.05, cela voudra dire que nous avons assez de raison pour accepter le fait que les résidus sont non autocorrélés au seuil de 5%.

Pour ces tests j'ai testé l'autocorrélation jusqu'au cinquième retard, puis l'autocorrélation des retards 10, 15 et 20. La motivation derrière de cette approche est que bien que les p-values sont supérieures à 0.05 (ANNEXE), je remarque une décroissance de la valeur des p-values aussi longtemps que les retards augmentent. Les p-values sont supérieures à 0.05 pour tous les retards avant le dixième mais à partir du dixième retard on remarque l'autocorrélation des résidus traduisant une dépendance de long terme des résidus. Une explication possible à cette situation est qu'il se pourrait qu'il y ait une persistance des chocs sur la volatilité que les modèles susmentionnés n'arrivent pas à détecter.

Pour cela il faudra envisager un modèle de volatilité qui va prendre en compte la persistance de la volatilité. Les résidus étant non corrélés des premiers jusqu'au neuvième retard, je considère les modèles valides pour la prévision de la volatilité.

5.6 Discussion sur les modèles estimés

Les modèles GARCH des ETF montrent des coefficients bêta assez élevés bien que les résidus des modèles ARMA qui ont conduit à leurs estimations sont stationnaires. Ces modèles GARCH bien même que remplissant les conditions de stationnarité, la somme des coefficient alpha et bêta du modèle sont très proche de 1 ce qui traduit une persistance des chocs dont les effets décroissent très lentement.

En ce qui concerne les variantes asymétriques du modèle GARCH, les modèles EGARCH, et GJR-GARCH présentent effectivement de l'asymétrie dans la volatilité au travers de leur coefficient gamma. La situation très peu rencontrée dans la littérature observée dans ces deux modèles est que les coefficients gamma des modèles EGARCH sont positifs ce qui signifie que la variation de la volatilité dû aux chocs positifs est plus importante que la variation de la volatilité dû aux chocs négatifs de même amplitude. De même le modèle GJR-GARCH confirme ce phénomène du fait que les chocs positifs font varier la volatilité beaucoup plus que les chocs négatifs de même amplitude au travers de son coefficient gamma négatif.

Pour les ETF SPY, DIA et XLE, le constat en ce qui concerne l'asymétrie observée dans la volatilité au travers des modèles EGARCH et GJR-GARCH est que ces deux modèles conduisent à la même conclusion. Même si cette situation est inhabituelle parce qu'on s'attend à ce que les chocs négatifs fassent bouger la volatilité plus que les chocs positifs comme le préconise la littérature.

Face à cette situation, je pose une hypothèse dérivée de la théorie de la demande d'actif fondé sur le taux d'intérêt. C'est une théorie macroéconomique selon lequel les agents économiques anticipent des rendements futurs plus élevés quand les taux sont inférieurs au taux d'équilibre et des attentes de gain plus faible lorsque les taux sont supérieurs à leur niveau d'équilibre. Cette théorie peut permettre d'expliquer cet effet de levier inversé.

Partant de cette hypothèse, si on suppose que les investisseurs qui s'intéressent aux ETF sont avertis, et ne se laissent pas guidés par l'émotion, des rendements faibles voir même négatifs peuvent traduire une anticipation à la hausse future des rendements c'est-à-dire des espérances de gain plus élevé quand le marché reviendra à la normale. Le retour du marché à la normale est expliqué par la théorie de réversion à la moyenne, Poberta & Summers (1988). De façon ramassé, si les la majorité des investisseurs sont des avertis en finance selon l'hypothèse posé ici, malgré la baisse des rendements, ils continueront à y investir en raison des anticipations de gains plus prometteuses.

Dans la section précédente, les résultats des tests de LJUNGBOX et de BOXPIERCE montrent la persistance des chocs sur la volatilité de même que les modèles GARCH ci-dessus présentées au travers de la somme de leurs coefficients alpha et bêta. Un modèle qui va considérer cet aspect de persistance des chocs sur la volatilité sera idéal pour le jugement du degré de persistance. Les modèles GARCH, EGARCH,

GJR-GARCH supposent un effet de court terme des chocs. Un modèle envisageable est le IGARCH mais le souci est qu'il prend en compte l'effet infini des chocs sur la volatilité pour cela le modèle Fi-GARCH est priorisé puisqu'il peut être considéré comme l'intermédiaire entre le IGARCH et les modèles GARCH utilisés jusqu'ici.

Si on suppose le paramètre d comme le niveau de persistance de la volatilité, il est de 0 soit $d=0$ dans les modèles GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, et égale à 1 soit $d=1$ dans le cas de IGARCH. Pour le Fi-GARCH, d est borné par 0 et 1 permettant que d ne soit ni égale à 0 ni égale à 1 mais plutôt compris entre ces deux valeurs. Les valeurs observées du paramètre d à savoir 0.5303, 0.6096, et 0.6328 respectivement du SPY, DIA et XLE montrent qu'il y a effectivement la persistance dans la volatilité des ETF en question. Les effets des chocs décroissent très lentement. En résumé cette persistance des chocs sur la volatilité en période de crise comme celui de la covid-19 observé dans ce document vient enrichir la littérature sur comment la COVID-19 a affectée la persistance de la volatilité. Les investisseurs et acteurs des marchés financier doivent être averti sur la persistance de la volatilité en présence de crise comme le COVID-19. Ci-dessous, les coefficients estimés des différents modèles de volatilité. La condition de stationnarité du modèle GJR-GARCH diffère un peu de celle de GARCH.

TABEAU 9: ESTIMATION DES COEFFICIENTS DES MODELES DE VOLATILITES. TOUS CES COEFFICIENTS SONT SIGNIFICATIFS AU SEUIL DE 5%.

	Alpha 0	Alpha 1	Alpha 2	Gamma	Bêta 1	Bêta 2	Condition Stationnarité $\Sigma(\alpha + \beta)$ ou $\Sigma(\alpha + \gamma/2 + \beta)$	d
SPY								
GARCH	0.0169	0.0561	0.0812		0.8574		0.9947	
EGARCH	0.0049	0.1598		0.1458	0.9713			
GJR-GARCH	0.0199	0.1950		-0.1959	0.8868		0.9839	
Fi-GARCH	0.0312				0.4785			0.5303
DIA								
GARCH	0.0167	0.0668	0.0765		0.8514		0.9947	
EGARCH	0.0016	0.1638		0.1492	0.9734			
GJR-GARCH	0.0171	0.2071		-0.2071	0.8844		0.9880	
Fi-GARCH	0.0294				0.5497			0.6053
XLE								
GARCH	0.0216	0.0737			0.9201		0.9938	
EGARCH	0.0215	0.0848	0.1147	0.0991	0.5281	0.4493		
GJR-GARCH	0.0283	0.1024		-0.0810	0.9265		0.9884	
Fi-GARCH	0.0393	0.1771			0.7385			0.6328

5.7 Volatilité réalisée

Pour juger de l'efficacité des modèles de type GARCH, il faudra établir une relation entre la volatilité réalisée et les volatilités prédites par les modèles. Plus l'erreur ou l'écart entre la volatilité prédite et la volatilité réalisée est moindre, plus le modèle est efficace.

La volatilité réalisée reflète le risque effectif lié au rendement attendu qui n'est pas directement observable. Sa définition peut être complexe et différente selon le type d'investisseur. Pour ces raisons dans la littérature les variables latentes ou proxy sont utilisées pour caractériser et quantifier la volatilité. Comme par exemple l'appréciation de la volatilité par une personne qui cherche à connaître le risque lié à un actif à ce jour sans tenir compte des volatilités passées ne sera pas la même face à une autre qui cherche à connaître la même volatilité à ce jour mais en tenant compte des volatilités passées. Dans le premier cas les rendements au carré comme proxy sera plus efficace et dans le deuxième cas, on peut lisser la volatilité de ce jour par la moyenne des volatilités pris en compte dans la détermination de la volatilité réalisée. Plus l'horizon des volatilités prise en compte est longue, moins la volatilité est sensible aux chocs car ce nouveau choc est noyé dans la moyenne qui continue la tendance centrale à partir de laquelle est calculé la volatilité réalisée. Plusieurs proxys existent pour quantifier la volatilité réalisée et la volatilité implicite est souvent utilisée également.

Pour cette recherche l'écart type des rendements sur les trente derniers jours sera utilisé comme proxy pour la volatilité du jour. Ce proxy est calculé au jour le jour en d'autres termes de façon glissante c'est à dire l'écart type (proxy de la volatilité réalisée) à un nouveau jour t est calculé à partir des rendements des trente derniers jours compris le rendement du jour t , la volatilité réalisée du jour $t+1$ est calculé à partir des rendements des 30 derniers jours également et le rendement du jour $t+1$ compris mais cette fois ci en délaissant le rendement du jour le plus ancien et ainsi de suite. Le fait d'avoir un horizon moins long et raisonnable dans notre cas de 30 jours, permettra d'observer une variabilité dans la moyenne des volatilités. L'écart type utilisé comme proxy pour la volatilité réalisée RV dans ce document est calculé comme suit :

$$RV = \sqrt{\frac{1}{30} \sum_{i=t-30+1}^t (r_i - \bar{r})^2}$$

Avec r_i comme rendement de l'ETF au jour i et $\bar{r}$ la moyenne des rendements des 30 derniers jours. Si t augmente de 1 jour, la période va de $t-30+2$ à $t+1$.

5.8 Prévision de la volatilité

Les coefficients obtenus à partir des modèles GARCH ont permis de prédire la volatilité et comme indiqué plus haut, la méthode de prévision glissante est adopt e. Dans cette méthode, la nouvelle prévision sera utilis e comme donn e qui va s'ajouter aux données existantes pour prédire la prochaine volatilité et ainsi de suite à chaque jour de plus les modèles GARCH sont réestimés.

Dans le but d'annualiser la volatilité, toutes les volatilités sont multipli es par la racine carr e de 252 que  a soit les volatilités r alis es ou prédites.

5.9  valuation de la prévision

Afin de juger de la performance de la prévision des modèles GARCH utilisés dans ce document, il est important de savoir si les prévisions de la volatilité obtenues grâce à ces modèles suivent le plus fidèlement possible la volatilité réalisée qui dans notre cas est repr sent e par le proxy qui est l'écart type noté RV. Des statistiques comme le MAE, MSE, RMSE, MSLE, RMLSE sont utilis es et le modèle présentant la plus petite valeur pour chacune de ces statistiques est consid r e comme le meilleur. Ces statistiques mesurent en réalité l'erreur entre la volatilité prédite et la volatilité réalisée raison pour laquelle avoir une valeur faible pour ces coefficients traduit avoir une erreur faible entre la volatilité prédite et réalisée.

Les résultats de ces statistiques sont résumés dans les tableaux ci-dessous. En jaune est marqu e les valeurs les plus faibles.

Au vu des résultats, le constat est qu'en ce qui concerne l'ETF SPY, le modèle EGARCH est le meilleur pour prédire sa volatilité tandis que le modèle GARCH est plus efficace avec la prévision de la volatilité de l'ETF DIA et XLE. Bien que le MAE du DIA est le plus faible pour EGARCH proposant ce modèle comme le meilleur, les autres indicateurs n'en disent pas autant. Le modèle GJR-GARCH dans ce cas est le moins efficace avec les valeurs de ses statistiques d'évaluation plus grandes. De façon générale ces deux modèles à savoir le GARCH et le EGARCH sont valides pour modéliser la volatilité des ETF.

TABLEAU 10: STATISTIQUES POUR EVALUATION DE LA PREVISION

SPY			
	GARCH	GJR-GARCH	EGARCH
MAE	0.0001205180266	0.0001602574429	0.0001157773105
MSE	0.0000000436218	0.0000000717992	0.0000000386247
RMSE	0.0002088584266	0.0002679538124	0.0001965317429
MSLE	0.0000000434392	0.0000000715075	0.0000000384747
RMSLE	0.0002084206956	0.0002674088167	0.0001961497061
DIA			
	GARCH	GJR-GARCH	EGARCH
MAE	0.0001234190274	0.0001568386883	0.0001216471964
MSE	0.0000000513591	0.0000000754500	0.0000000523220
RMSE	0.0002266254991	0.0002746816799	0.0002287400096
MSLE	0.0000000511247	0.0000000751028	0.0000000520958
RMSLE	0.0002261076427	0.0002740489318	0.0002282450911
XLE			
	GARCH	GJR-GARCH	EGARCH
MAE	0.0001121081190	0.0001472880809	0.0001323772737
MSE	0.0000000398281	0.0000000683084	0.0000000643645
RMSE	0.0001995698726	0.0002613587455	0.0002537016463
MSLE	0.0000000395600	0.0000000678493	0.0000000639472
RMSLE	0.0001988969249	0.0002604790215	0.0002528777736

Chapitre 6 Discussion et conclusion

Ce mémoire a pour objectif de modéliser et estimer la volatilité des fonds négociés en bourse sur une période relativement longue et plusieurs étapes ont été nécessaire pour parvenir à cela. Tout d'abord après avoir s'assurer que les rendements sont stationnaires, j'ai procédé à la recherche de la moyenne conditionnelle par le modèle ARMA.

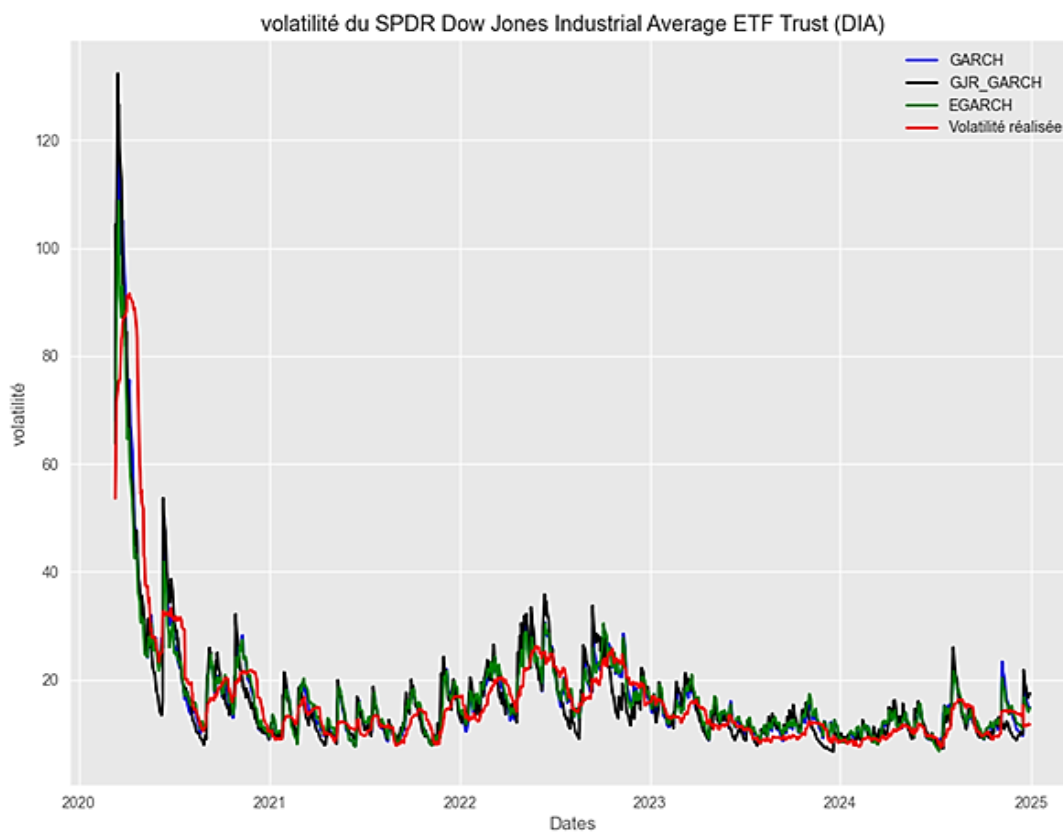
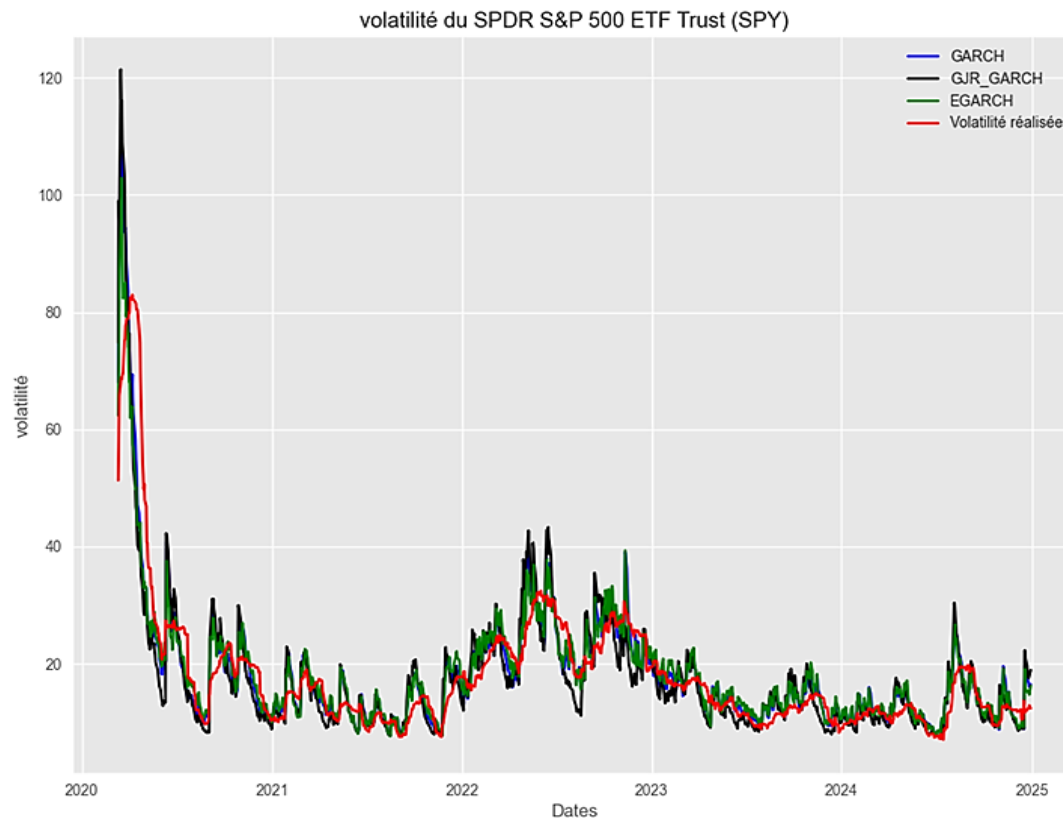
Ensuite j'ai cherché à savoir s'il y a des effets ARCH dans les résidus issus des modèles ARMA des trois ETF choisis. Cette recherche a été confirmée par l'affirmatif et j'ai procédé à la modélisation avec des modèles de type GARCH sur base des résidus obtenus à partir des modèles ARMA sous trois différentes distributions de probabilité et je suis arrivé à la conclusion que les résidus sont plus représentés par la distribution de student.

Dans la majorité des cas on constate dans la littérature selon les faits stylisés que les chocs négatifs font varier la volatilité beaucoup plus que les chocs positifs de même amplitude ou magnitude et ce fait stylisé est appelé l'effet de levier. Dans ce mémoire, l'effet de levier inversé est observé pour l'ensemble des trois ETF retenus pour l'étude dans ce sens que la volatilité de ces actifs est plus importante en cas de chocs positif que cela ne l'est pour les chocs négatifs de même amplitude contrairement à la littérature mais qui pourrait s'expliquer par la théorie de la demande des actifs.

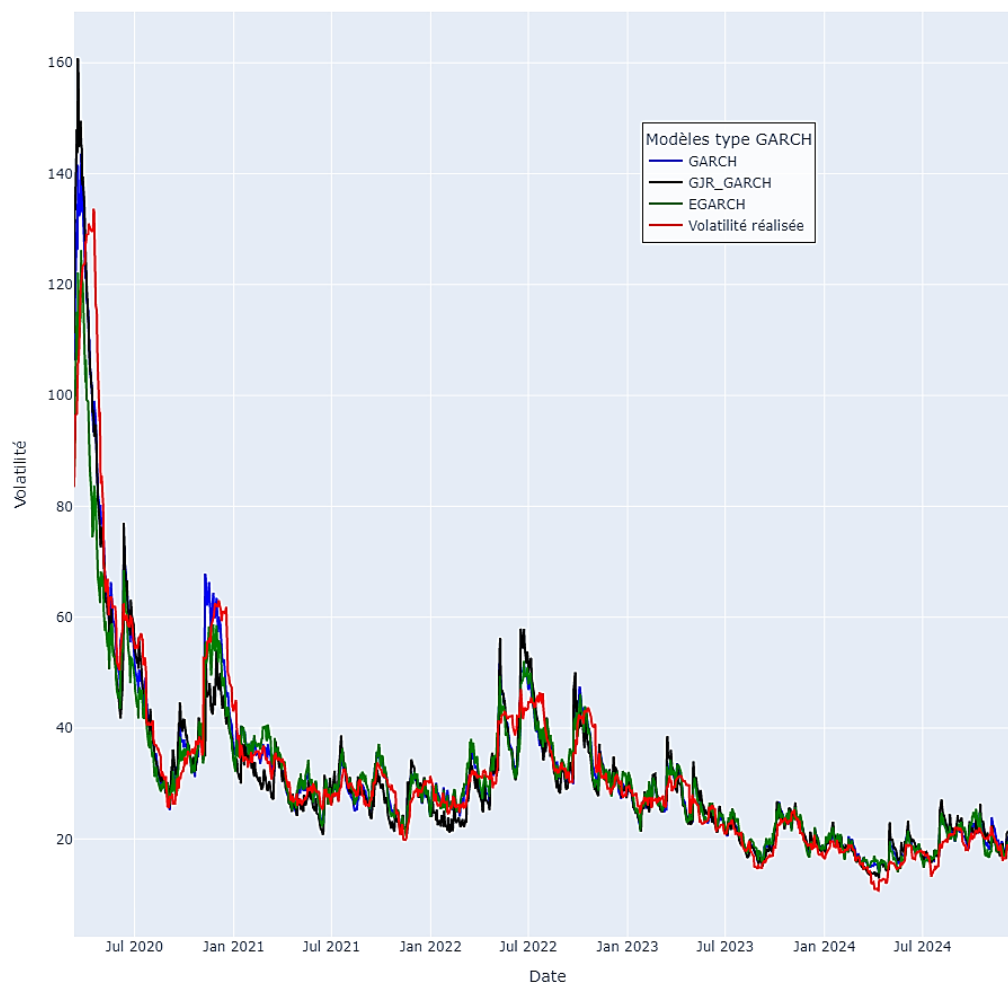
Un autre aspect à soulever est que ces trois ETF sont sensibles aux crises spécialement pour la COVID 19 où le constat montre la persistance dans la volatilité. Bien que les effets des chocs soient décroissant dans le temps, on observe quand même que cette décroissance est très faible avec la valeur des coefficients des différentes modèles GARCH qui sont proche de l'unité et de la valeur du coefficient d dans le modèle FIGARCH.

Les modèles de types GARCH dont les coefficients sont estimés dans ce document sont modéliser pour voir leur capacité à prédire la volatilité en situation de crise et après la crise de covid-19. Pour juger de la qualité de la prévision, les valeurs prédites sont comparées à la volatilité réalisée représentée par le proxy choisi pour ce document aussi longtemps qu'elle n'est pas directement observable.

Notre recommandation pour les prochaines recherches allant dans ce sens est d'élargir le champ de sélection en s'intéressant à d'autres ETF pour éviter une généralisation selon laquelle les ETF présentent des effets de levier inversé. Les trois ETF ne constituent pas un échantillon assez représentatif des ETF en générale même si on peut prendre le risque de généraliser les résultats aux ETF de même nature c'est-à-dire les ETF indiciels.



Volatilité duEnergy Select Sector SPDR Fund (XLE).



RÉFÉRENCES

Ahoniemi, K. (2006). *Modeling and forecasting implied volatility: An econometric analysis of the VIX index. Working paper, Helsinki School of Economics, Finland, Helsinki.*

Andersen, T. G. & Bollerslev, T. (1998). *Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. International Economic Review, 39, 885–905.*

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Labys, P. (2003). *Modeling and forecasting realized volatility. Econometrica, 71, 579–625.*

Andrew W. Lo and A. Craig MacKinlay (1988). *Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test.*

Benoit Mandelbrot, *The Variation of Certain Speculative Prices, The Journal of Business, Vol. 36, No. 4 (Oct., 1963), pp. 394-419.*

Black, F. (1976). *Studies of stock price volatility changes. American statistical association, Business and Economic statistics section, pages 177-181.*

Black, F., Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political Economy, 81: 637 – 654.*

Bollerslev, T. (1987). *A Conditionally Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. Review of Economics and Statistics. 69:542 – 547.*

Bollerslev, T. and Wooldridge, J. M. (1992). *Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. Econometric Reviews. 11:2, 143-172.*

Bollerslev, T. P. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Economics. 31:307-327.*

Bollerslev, T., Chou, R. Y. and Kroner, K. F. (1992). *ARCH Modeling in Finance: A review of the theory and empirical evidence. Journal of Econometrics. 52:5-59.*

Brooks, C. (2008). *Introductory Economics for Finance. (Second Edition)*. New York: Cambridge University Press.

Bruno Dinga et al. (2023) *Modeling and Predicting Exchange Rate Volatility: Application of Symmetric GARCH and Asymmetric EGARCH and GJR-GARCH Models*.

Campbell, J. Y., & Perron, P. (1991). Pitfalls and opportunities: What macroeconomists should know about unit roots. *NBER Macroeconomics Annual*, 6, 141-220.

Cont, R. (2001). Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. *Quantitative Finance* 1:223-236.

Ding, Z., Granger, C. W. J., and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1, 83–106.

Duttilo, P., Gattone, S. A., & Di Battista, T. (2021). Volatility Modeling: An Overview of Equity Markets in the Euro Area during COVID-19 Pandemic. *Mathematics*, 9(11), 1212.

Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Cointegration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55(2), 251-276.

Fama, E., and Macbeth, J. (1973). Risk, Return, and Equilibrium Empirical Tests. *Journal of Political Economy*, 81: 607-636.

Fama E. F, (1963) Mandelbrot and the stable paretian hypothesis *J. Business* **36** 420–29

Glosten, L., Jagannathan, R., & Runkle, D. (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.

Hansen, P. R. (2005). A test for superior predictive ability. *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(4):365-380.

Hawaladar, I. T., Mallikarjunappa, T., & Nayak, P. (2007). Stock Price Adjustments to Quarterly Earnings Announcement: A Test of Semi-Strong Form of Efficiency. *Gyan Management*, 1(2), 25-42.

Hawaladar, I. T., Mallikarjunappa, T., & Nayak, P. (2007). *Stock Price Adjustments to Quarterly Earnings Announcement: A Test of Semi-Strong Form of Efficiency*. *Gyan Management*, 1(2), 25-42.

Merton, R.C. (1969). *Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case*. *Review of Economics and Statistics*, 51: 247 – 257.

Mikosch, J.-P. Kreis, R. A. Davis & T. G. Andersen (Eds.), *Handbook of financial time series* (pp. 801–838). Berlin, Heidelberg: Springer.

Nelson, D.B (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. *Econometrica*, 59, 347-370.

Patton, A. J. (2006). *Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies*. *Quantitative Finance Research Centre, University of Technology Sydney, Research Paper 175*.

Patton, A. J., and Sheppard, K. (2009). *Evaluating volatility and correlation forecasts*.

Poon, S. and Granger, C. (2001). *Forecasting financial market volatility: A Review*. *Department of Economics*.

Haibin Xie and Chengtan Yu (2021), *Realized GARCH models: Simpler is better by*.

Schwarz, G. E. (1978). *Estimating the dimension of a model*, *Annals of Statistics*, 6 (2): 461–464, doi:10.1214/aos/1176344136, MR 0468014.

Schwert, G. W. (1989). *Why does stock market volatility change over time?* *Journal of finance*, 44:1115-1153.

Sharpe, W. F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. *The Journal of Finance*, 19:425-442.

Taylor, S. J. (1986). *Forecasting the volatility of currency exchange rates*. *International Journal of Forecasting*, 3:70-159.

Taylor, S. J. (2005). Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction, volume I. Princeton University press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540.

Tsay, R. T. (2013). An introduction to analysis of financial data with R. Johan Wiley & Sons ltd.

West, K. D. and Cho, D. (1995). The predictive ability of several models of exchange rate volatility. Journal of econometrics, 69(2):367-391.

White, H. (2000). A reality check for data snooping. Econometrica, 68:1097-1126.

Wu, J. (2010). Threshold garch model: Theory and application. The University of Western Ontario.

Zivot, E. (2016). Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics with R. Monograph. Springer.

Spulbar, Cristi et al. «Testing volatility spillovers using GARCH models in the Japanese stock market.» BUSINESS PERSPECTIVES, 2022: 270, 271.

ANNEXES

SPY

AIC des modèles de volatilité du SPY_selon Generalized error distribution

Modèle GARCH			Modèle EGARCH			Modèle GJR			Modèle GED		
P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	2	13589.52	2	1	13457.02	2	1	13457.02	3	3	13417.8
2	1	13589.57	3	1	13458.7	3	1	13458.7	2	3	13419.45
3	2	13591.13	1	1	13459.02	1	1	13459.02	2	2	13424.45
2	3	13591.52	2	2	13459.02	2	2	13459.02	3	2	13425.74
3	1	13591.57	3	2	13460.7	3	2	13460.7	2	1	13427.96
3	3	13593.02	2	3	13460.96	2	3	13460.96	3	1	13429.86
1	1	13600.34	1	2	13461.02	1	2	13461.02	1	1	13445.61
1	2	13602.34	3	3	13462.66	3	3	13462.66	1	2	13447.61
1	3	13604.34	1	3	13462.87	1	3	13462.87	1	3	13448.08
3	0	13968.65	3	0	13937.99	3	0	13937.99	0	3	13852.05
2	0	14170.82	2	0	14146.06	2	0	14146.06	0	2	13871.62
1	0	14564.2	0	1	14158.45	0	1	14158.45	0	1	13881.39
Ordre P, Q et AIC du modèle GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle GJR suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle EGARCH suivant la Generalized error distribution (GED)		

AIC modèle de volatilité de SPY selon la distribution de student

Ordre P, Q et AIC du modèle GARCH suivant la distribution de student			Ordre P, Q et AIC du modèle GJR- GARCH suivant la distribution de student			Ordre P, Q et AIC du modèle EGARCH suivant la distribution de student		
P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	1	13596.05	2	1	13458.17	2	3	13411.27
2	2	13596.22	3	1	13459.89	2	3	13413.33
3	2	13597.57	2	2	13460.17	2	2	13419.85
3	1	13598.05	1	1	13460.79	3	2	13420.99
2	3	13598.19	3	2	13461.89	2	1	13424.43
3	3	13599.45	2	3	13462.05	3	1	13426.4
1	1	13609.89	1	2	13462.79	1	1	13444.66
1	2	13611.89	3	3	13463.79	1	2	13446.66
1	3	13613.89	1	3	13464.56	1	3	13446.81
3	0	13987.89	3	0	13946.47	0	1	13861.68
2	0	14206.86	0	1	14169.6	0	2	14008.46
1	0	14604.96	0	2	14171.6	3	0	14268.67
Ordre P, Q et AIC du modèle GARCH suivant la distribution de student			Ordre P, Q et AIC du modèle GJR- GARCH suivant la distribution de student			Ordre P, Q et AIC du modèle EGARCH suivant la distribution de student		

AIC modèle de volatilité de SPY selon la distribution normale

P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	2	13840.24	2	1	13649.23	2	2	13884.6
3	2	13841.93	3	1	13650.1	3	2	13886.51
2	3	13842.24	1	1	13650.48	2	3	13886.6
2	1	13843.17	2	2	13651.23	3	3	13888.46
3	3	13843.87	3	2	13652.1	3	1	13888.62
3	1	13845.17	1	2	13652.48	2	1	13892.23
1	1	13853.25	2	3	13653.22	1	1	13899.87
1	2	13855.25	3	3	13654.1	1	2	13901.87
1	3	13857.25	1	3	13654.38	1	3	13903.87
3	0	14461.07	3	0	14429.28	3	0	14949.54
2	0	14776.66	2	0	14750.45	2	0	15201.98
1	0	15527.53	0	1	14821.9	1	0	15866.56
Ordre P,Q et AIC du modèle GARCH suivant la distribution normale			Ordre P,Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la distribution normale			Ordre P,Q et AIC du modèle EGARCH suivant la distribution normale		

DIA

AIC des modèles de volatilité du DIA selon Generalized error distribution

P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	1	13085.98	1	1	12939.21	3	3	12908.11
2	2	13087.82	2	1	12939.77	2	3	12911.26
3	1	13087.98	3	1	12941.18	2	2	12911.80
3	2	13089.66	1	2	12941.21	3	2	12911.82
2	3	13089.82	2	2	12941.77	2	1	12912.82
4	1	13089.98	4	1	12942.07	3	1	12913.81
2	4	13091.59	3	2	12943.18	1	1	12925.59
4	2	13091.65	1	3	12943.21	1	2	12927.59
3	3	13091.66	2	3	12943.77	1	3	12929.45
4	3	13092.89	4	2	12944.07	0	3	13372.40
3	4	13093.62	1	4	12945.16	0	2	13378.78
4	4	13093.95	3	3	12945.18	0	1	13383.28
Ordre P, Q et AIC du modèle GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle EGARCH suivant la Generalized error distribution (GED)		

AIC des modèles de volatilité du DIA selon la distribution de student

P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	1	13096.03	1	1	12940.76	2	2	12908.85
2	2	13097.97	2	1	12941.29	2	1	12910.08
3	1	13098.03	3	1	12942.71	1	1	12923.79
3	2	13099.79	1	2	12942.76	1	2	12925.79
2	3	13099.97	2	2	12943.29	2	0	13913.61
4	1	13100.03	4	1	12943.85	1	0	14153.76
4	2	13101.78	3	2	12944.71	0	0	14296.61
3	3	13101.79	1	3	12944.76	0	1	60380.88
2	4	13101.85	2	3	12945.29	0	2	60399.86
4	3	13102.83	4	2	12945.85	Ordre P,Q et AIC du modèle EGARCH suivant la Generalized error distribution (GED)		
3	4	13103.78	1	4	12946.7			
4	4	13104.76	3	3	12946.71			
Ordre P,Q et AIC du modèle GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P,Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)					

AIC des modèles de volatilité du DIA selon la distribution normale

P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	1	13336.51	1	1	13125.03	2	2	13091.56
2	2	13337.31	2	1	13125.83	2	1	13092.54
3	1	13338.51	1	2	13127.03	1	1	13108.41
3	2	13339.28	3	1	13127.06	1	2	13110.41
2	3	13339.31	4	1	13127.1	0	2	13827.35
2	4	13340.4	2	2	13127.83	0	1	13841.44
4	1	13340.51	1	3	13129.03	2	0	14625.75
3	3	13341.27	3	2	13129.06	1	0	15319.95
4	2	13341.28	4	2	13129.1	0	0	15592.44
4	4	13341.89	2	3	13129.83	ordre P,Q et AIC du modèle EGARCH suivant la Generalized error distribution (GED)		
4	3	13342.53	1	4	13130.85			
3	4	13342.97	3	3	13131.06			
ordre P,Q et AIC du modèle GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			ordre P,Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)					

XLE

AIC des modèles de volatilité du XLE selon Generalized error distribution

P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
1	1	18072.05	2	2	18017.5	2	2	18008.84
2	2	18072.84	2	1	18018.83	1	1	18012.34
1	2	18074.04	1	1	18018.86	1	2	18013.28
2	1	18074.05	1	2	18020.14	2	1	18013.38
2	3	18074.32	0	1	18494.44	0	2	18558.6
2	4	18074.62	0	2	18496.44	0	1	18568.38
3	2	18074.84	2	0	18566.4	2	0	18696.92
1	3	18075.41	1	0	18792.01	1	0	18878.84
3	1	18076.05	0	0	19036.5	0	0	18982.34
Ordre P, Q et AIC du modèle GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la Generalized error distribution (GED)			Ordre P, Q et AIC du modèle EGARCH suivant la Generalized error distribution (GED)		

AIC des modèles de volatilité du XLE selon la distribution de student

Ordre P,Q et AIC du modèle GARCH suivant la distribution de student			Ordre P,Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la distribution de student			Ordre P,Q et AIC du modèle E-GARCH suivant la distribution de student		
P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
1	1	18052.21	2	3	17999.71	2	2	17992.7
2	2	18052.98	3	3	18001.68	1	1	17996.62
2	1	18054.01	2	2	18002.4	2	1	17996.81
1	2	18054.21	2	1	18003.32	1	2	17998.02
3	2	18054.98	1	1	18003.8	0	2	18554.49
2	3	18055.38	3	2	18004.4	0	1	18564.19
3	1	18056.01	1	3	18005.14	2	0	18651.81
1	3	18056.16	3	1	18005.32	1	0	18799.27
3	3	18056.58	1	2	18005.39	0	0	18904.41
Ordre P,Q et AIC du modèle GARCH suivant la distribution de student			Ordre P,Q et AIC du modèle GJR-GARCH suivant la distribution de student			Ordre P,Q et AIC du modèle E-GARCH suivant la distribution de student		

AIC des modèles de volatilité du XLE selon la distribution normale

P	Q	AIC	P	Q	AIC	P	Q	AIC
2	3	18156.85	2	2	18082.35	2	2	18073.77
1	1	18156.92	1	1	18084.82	1	2	18077.97
2	2	18156.94	2	1	18084.91	1	1	18077.98
1	3	18158.37	1	2	18085.48	2	1	18079.57
1	2	18158.65	2	0	18859.48	0	2	18802.63
3	3	18158.85	0	1	18883.73	0	1	18818.93
2	1	18158.92	0	2	18892.78	2	0	19109.6
3	2	18158.94	1	0	19314.09	1	0	19537.44
3	1	18160.92	0	0	19958.9	0	0	19718.17
Ordre P,Q et AIC du modèle GARCH suivant la distribution normale			Ordre P,Q et AIC du modèle GIR-GARCH suivant la distribution normale			Ordre P,Q et AIC du modèle E-GARCH suivant la distribution normale		

Tests d'autocorrélation LJUNGBOX et de BOXPIERCE des résidus des différents modèles

Les tableaux ci-dessous présentent les résultats des tests d'autocorrélation de LJUNGBOX et de BOXPIERCE aux retards de 1 à 5 puis aux retard 10, 15, et 20 des résidus des différents modèles retenus.

La définition des données du tableau se présente comme suit :

T : les retards

LB_STAT : La statistique du test de LJUNGBOX

LB_PVALUE : la p-value du test de LJUNGBOX

BP_STAT : La statistique du test de BOXPIERCE

BP_PVALUE : la p-value du test de BOXPIERCE

Dans l'ordre des tableaux respectivement, les tests d'autocorrélation des résidus du modèle GARCH, GJR-GARCH, EGARCH, FI_GARCH. A titre d'exemple les 4 premières lignes du tableau pour le modèle GARCH (**LB_STAT** et **LB_PVALUE** pour le LJUNGBOX ensuite **BP_STAT** et **BP_PVALUE** pour le BOXPIERCE), les 4 prochaines pour le GJR-GARCH et ainsi de suite.

Test de LJUNGBOX et de BOXPIERCE du SPY

T	1	2	3	4	5	10	15	20
LB_STAT	2.56259501	2.59179735	2.59203308	4.49072374	4.49089673	15.9774686	34.7413869	44.0772629
LB_PVALUE	0.10941885	0.27365183	0.45888796	0.34364882	0.48110235	0.10027921	0.00267622	0.00146949
BP_STAT	2.56108166	2.59026101	2.59049651	4.48694462	4.48711737	15.9510515	34.661872	43.9632392
BP_PVALUE	0.10952362	0.27386212	0.45915807	0.34409832	0.48160894	0.10104221	0.00274661	0.00152208
LB_STAT	2.56259501	2.59179735	2.59203308	4.49072374	4.49089673	15.9774686	34.7413869	44.0772629
LB_PVALUE	0.10941885	0.27365183	0.45888796	0.34364882	0.48110235	0.10027921	0.00267622	0.00146949
BP_STAT	2.56108166	2.59026101	2.59049651	4.48694462	4.48711737	15.9510515	34.661872	43.9632392
BP_PVALUE	0.10952362	0.27386212	0.45915807	0.34409832	0.48160894	0.10104221	0.00274661	0.00152208
LB_STAT	2.56259501	2.59179735	2.59203308	4.49072374	4.49089673	15.9774686	34.7413869	44.0772629
LB_PVALUE	0.10941885	0.27365183	0.45888796	0.34364882	0.48110235	0.10027921	0.00267622	0.00146949
BP_STAT	2.56108166	2.59026101	2.59049651	4.48694462	4.48711737	15.9510515	34.661872	43.9632392
BP_PVALUE	0.10952362	0.27386212	0.45915807	0.34409832	0.48160894	0.10104221	0.00274661	0.00152208
LB_STAT	2.56259501	2.59179735	2.59203308	4.49072374	4.49089673	15.9774686	34.7413869	44.0772629
LB_PVALUE	0.10941885	0.27365183	0.45888796	0.34364882	0.48110235	0.10027921	0.00267622	0.00146949
BP_STAT	2.56108166	2.59026101	2.59049651	4.48694462	4.48711737	15.9510515	34.661872	43.9632392
BP_PVALUE	0.10952362	0.27386212	0.45915807	0.34409832	0.48160894	0.10104221	0.00274661	0.00152208

Test de LJUNGBOX et de BOXPIERCE du DIA

T	1	2	3	4	5	10	15	20
LB_STAT	0.01716005	1.59052013	1.60572123	1.87463394	5.31859668	18.49999974	33.6154435	43.7442738
LB_PVALUE	0.89577819	0.45146381	0.65809327	0.7588031	0.37824748	0.04709276	0.00385482	0.00162818
BP_STAT	0.01714991	1.58927112	1.60445727	1.87305237	5.31226948	18.468225	33.5379683	43.6288749
BP_PVALUE	0.89580879	0.45174584	0.65837959	0.75909341	0.37897038	0.04756062	0.00395198	0.00168692
LB_STAT	0.01716005	1.59052013	1.60572123	1.87463394	5.31859668	18.49999974	33.6154435	43.7442738
LB_PVALUE	0.89577819	0.45146381	0.65809327	0.7588031	0.37824748	0.04709276	0.00385482	0.00162818
BP_STAT	0.01714991	1.58927112	1.60445727	1.87305237	5.31226948	18.468225	33.5379683	43.6288749
BP_PVALUE	0.89580879	0.45174584	0.65837959	0.75909341	0.37897038	0.04756062	0.00395198	0.00168692
LB_STAT	0.01716005	1.59052013	1.60572123	1.87463394	5.31859668	18.49999974	33.6154435	43.7442738
LB_PVALUE	0.89577819	0.45146381	0.65809327	0.7588031	0.37824748	0.04709276	0.00385482	0.00162818
BP_STAT	0.01714991	1.58927112	1.60445727	1.87305237	5.31226948	18.468225	33.5379683	43.6288749
BP_PVALUE	0.89580879	0.45174584	0.65837959	0.75909341	0.37897038	0.04756062	0.00395198	0.00168692
LB_STAT	0.01716005	1.59052013	1.60572123	1.87463394	5.31859668	18.49999974	33.6154435	43.7442738
LB_PVALUE	0.89577819	0.45146381	0.65809327	0.7588031	0.37824748	0.04709276	0.00385482	0.00162818
BP_STAT	0.01714991	1.58927112	1.60445727	1.87305237	5.31226948	18.468225	33.5379683	43.6288749
BP_PVALUE	0.89580879	0.45174584	0.65837959	0.75909341	0.37897038	0.04756062	0.00395198	0.00168692

Test de LJUNGBOX et de BOXPIERCE du XLE

T	1	2	3	4	5	10	15	20
LB_STAT	5.74E-05	0.0002475	0.07184804	0.18662919	3.41487244	14.4076887	20.5072322	32.3443884
LB_PVALUE	0.99395375	0.99987626	0.99498698	0.9959078	0.63630582	0.15519451	0.15332578	0.03976409
BP_STAT	5.74E-05	0.00024732	0.07177739	0.18642297	3.41021785	14.3818535	20.4621992	32.2528373
BP_PVALUE	0.99395554	0.99987635	0.99499427	0.99591656	0.63701419	0.15627565	0.15490982	0.04067759
LB_STAT	5.74E-05	0.0002475	0.07184804	0.18662919	3.41487244	14.4076887	20.5072322	32.3443884
LB_PVALUE	0.99395375	0.99987626	0.99498698	0.9959078	0.63630582	0.15519451	0.15332578	0.03976409
BP_STAT	5.74E-05	0.00024732	0.07177739	0.18642297	3.41021785	14.3818535	20.4621992	32.2528373
BP_PVALUE	0.99395554	0.99987635	0.99499427	0.99591656	0.63701419	0.15627565	0.15490982	0.04067759
LB_STAT	5.74E-05	0.0002475	0.07184804	0.18662919	3.41487244	14.4076887	20.5072322	32.3443884
LB_PVALUE	0.99395375	0.99987626	0.99498698	0.9959078	0.63630582	0.15519451	0.15332578	0.03976409
BP_STAT	5.74E-05	0.00024732	0.07177739	0.18642297	3.41021785	14.3818535	20.4621992	32.2528373
BP_PVALUE	0.99395554	0.99987635	0.99499427	0.99591656	0.63701419	0.15627565	0.15490982	0.04067759
LB_STAT	5.74E-05	0.0002475	0.07184804	0.18662919	3.41487244	14.4076887	20.5072322	32.3443884
LB_PVALUE	0.99395375	0.99987626	0.99498698	0.9959078	0.63630582	0.15519451	0.15332578	0.03976409
BP_STAT	5.74E-05	0.00024732	0.07177739	0.18642297	3.41021785	14.3818535	20.4621992	32.2528373
BP_PVALUE	0.99395554	0.99987635	0.99499427	0.99591656	0.63701419	0.15627565	0.15490982	0.04067759