HASSANI CHAKER

L'ALLOCATION DES RESSOURCES ET LE COMPROMIS DURÉE-COÛT-QUALITÉ

MÉMOIRE PRÉSENTÉ
À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN OUTAOUAIS

POUR L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES (M. Sc.)

DÉPARTEMENT DES SCIENCES ADMINISTRATIVES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN OUTAOUAIS
PROGRAMME DE MAÎTRISE EN GESTION DE PROJET

DÉCEMBRE 2011

Résumé

On assiste aujourd'hui à une concurrence acharnée et une multiplicité des entreprises, des outils et des procédures preuves d'une exigence accrue des clients. Dans le domaine de la gestion de projet, la notion de respect des délais, des coûts, de la qualité et d'autres spécificités n'est plus une option mais une exigence. Une exigence obligeant le preneur de décision à accorder une attention particulière aux différentes spécificités du projet et à gérer avec soin les multiples ressources mises à sa disposition ainsi que les problèmes liés à sa gestion.

En ce sens, les enjeux de l'allocation des ressources et le respect de l'engagement envers les parties prenantes deviennent sérieux, voire même fatals en cas de manquement.

L'objectif général de la présente recherche consiste en l'élaboration d'une méthode permettant d'aider le gestionnaire de projet à trouver le dosage adéquat entre l'allocation des ressources et les trois contraintes du triangle vertueux.

La question spécifique de la recherche consiste quant à elle à mettre au point un modèle mathématique permettant de répondre aux besoins du gestionnaire de projet au titre de l'allocation de ressources et le compromis entre la durée, le coût et la qualité.

L'allocation d'un type différent de ressources peut faire varier la durée nécessaire de réalisation d'une activité et par conséquent son coût et sa qualité. Ainsi le choix entre les différentes combinaisons durée-ressources constitue un majeur problème auquel doit faire face le gestionnaire de projet et ce que nous tenterons de résoudre dans ce travail.

Le travail montrera à cet effet, l'intérêt que doit manifester le gestionnaire de projet à l'allocation des ressources en tant qu'élément simulateur des autres spécificités du projet (la durée, le coût et la qualité).

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de recherche M^r^ Sébastien AZONDÉKON pour son aide, sa patience et surtout sur la liberté qu'il m'a accordé pour la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à remercier mon père MANSOUR et ma mère MAJIDA, ma sœur AOUATEF et mes deux frères BADIS et KAÎS qui malgré la distance ne cessent de me soutenir et de m'encourager.

J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours appuyé et accompagné au cours de la réalisation de ce mémoire.

J'exprime en fin ma gratitude à toutes personnes qui, de près ou de loin, m'a aidé dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

Page No.

Liste des figures..... 6

Liste des tableaux..... 7

Introduction..... 8

Chapitre I / LE CADRE CONCEPTUEL 12

1/ Accélération du projet..... 13

2/ Allocation des Ressources..... 14

3/ Compromis durée- coût- qualité..... 15

a- Le compromis coût-qualité 16

b- Le compromis durée-qualité 16

c- Le compromis durée-ressource..... 16

d- Le compromis durée-coût..... 17

4/ Performance du projet..... 18

Chapitre II / LE COMPROMIS EN GESTION DE PROJET..... 20

Revue de la littérature

1/ Le compromis durée-coût..... 22

2/ Le compromis durée-ressource..... 26

3/ Le compromis durée-coût-qualité..... 30

4/ L'allocation des ressources..... 34

5/ Le compromis en présence de diversité de modes..... 40

Chapitre III/ MODÉLISATION MATHÉMATIQUE..... 46

1/ Position du problème..... 47

a/ Le problème d'ordonnancement du projet avec ressources limitées dans un contexte de multiplicité de modes (RCPSPMCM)..... 48

b/ L'allocation des ressources initiales..... 49

c/ Fonctions d'allocations des ressources supplémentaires..... 51

2/ Fonction d'allocations de ressources et optimisations du coût 52

a/ Fonctions d'allocations des ressources 52

b/ Fonctions des coûts..... 55
c/ Élaboration du modèle mathématique..... 57
3/ Fonction d'optimisation de la durée..... 61
4/ Fonction d'optimisation de la qualité..... 64
Chapitre IV/ ILLUSTRATION..... 67
1/ Résolution du problème d'optimisation du coût..... 69
2/ Résolution du problème d'optimisation de la durée..... 79
3/ Résolution du problème d'optimisation de la qualité..... 80
4/ Conclusion..... 82
Conclusion générale..... 83
Références 86
Annexes 90
Annexe 1 91
Annexe 2 91
Annexe 3 92

Liste des figures

Figure			Page No.
1		Cercle vertueux (durée normale).....	32
2		Cercle vertueux après allocation de ressources supplémentaires.....	32
3		Quantité de ressource nécessaire selon l'accélération.....	38
4		Illustration graphique du coût relatif à l'accélération de (i,j).....	39
5		Illustration graphique de la quantité de ressource nécessaire par accélération	
	5.a	Ressource du type K1.....	54
	5.b	Ressource du type K2.....	54
	5.c	Ressource du type K3.....	54
6		Illustration graphique de la quantité de ressource nécessaire par unité de temps de travail	
	6.a	Ressource du type K1.....	54
	6.b	Ressource du type K2.....	54
	6.c	Ressource du type K3.....	54
7		Illustration graphique de la variation du coût pour les ressources	
	7.a	Ressource du type K1.....	56
	7.b	Ressource du type K2.....	56
	7.c	Ressource du type K3.....	56
8		Illustration graphique du coût total suite à l'utilisation des ressources K1, K2 et K3.....	56
9		Réseau du projet.....	68
10		Illustration graphique du coût total de l'activité (3,4) selon l'accélération	77

Liste des tableaux

Tableau No.		Page No.
1	Caractéristiques d'une activité.....	59
2	Données relatives au projet selon les modes 1 et 2.....	69
3	Variation du coût des ressources initiales en fonction de l'accélération.	72
4	Paramètres relatifs aux fonctions d'allocations des ressources.....	73
5	Quantité de ressources supplémentaires indispensables par unité de temps de travail.....	74
6	Coûts unitaires des ressources initiales par unité de temps	75
7	Incrément de coût des activités selon l'accélération.....	76
8	Coûts totaux des différentes activités selon l'accélération.....	77
9	Détails des incréments de coût selon le mode sélectionné.....	78
10	Variations de la qualité et seuils minimums.....	80
11	Qualité finale des activités.....	81
12	Coût unitaire de k1 selon la durée de travail.....	91
13	Coût unitaire de K2 selon la durée de travail.....	91
14	Coût des différentes ressources selon l'accélération.....	92

Introduction

Dans un environnement fortement dynamique, et dans un marché changeant et évolutif, la gestion de projet est devenue beaucoup plus qu'une nécessité permettant la pérennité des organisations (Kerzner, 2001) se trouvant ainsi dans un champ fortement compétitif qui ne cesse de prendre de plus en plus d'ampleur.

On assiste aujourd'hui à une multiplicité des entreprises, des outils et des procédures preuves d'une exigence accrue des clients. Une exigence obligeant le preneur de décision à accorder une attention particulière aux différentes spécificités du projet et à gérer avec soin les multiples ressources mises à sa disposition ainsi que les problèmes liés à la gestion (absentéisme, maladie, compétence, spécialisation, rendement, disponibilité, conflit entre ressources, conflit d'affectation...).

Quelle que soit l'organisation, gouvernementale ou privée, quelle que soit sa taille, elle est amenée chaque fois à mener des projets d'envergures différentes nécessitant une gestion des contraintes et des problèmes exigeants, ce qui invitent généralement le gestionnaire de projet, entre autres, à réaliser le projet dans un délai moindre, à un incrément de coût réduit sans toutefois nuire à la qualité.

Depuis toujours, les problèmes d'accélération de projet, de contrôle des coûts, de l'amélioration de la qualité et la satisfaction des parties prenantes prennent plus d'espace et tiennent l'esprit des chercheurs. En témoigne le nombre des chercheurs ainsi que des recherches en gestion de projet.

Le gestionnaire de projet est amené chaque fois non seulement à négocier non sans difficulté les contraintes de coût, de délais et de qualité (le triangle vertueux), mais aussi à gérer des ressources qualifiées par la multiplicité et la variété eu égard à la nature et au contexte du projet.

La disponibilité des ressources est toujours limitée, ce qui crée souvent des problèmes et des conflits lors de son affectation. Aussi l'envergure changeante du projet

fait qu'il y a toujours des rectifications, des adaptations et surtout des écarts à gérer et notamment des retards à rattraper.

La planification initiale n'est pas figée, pour une raison ou une autre, il y'a très souvent la volonté (prévisible) d'achever le projet plus tôt que prévu à un incrément de coût minimum. Le gestionnaire de projet se trouve souvent contraint d'accélérer la durée du projet. L'accélération du projet, n'est pas non plus l'unique objectif, puisque l'objectif d'optimisation du coût total du projet et l'amélioration de la qualité du projet sont aussi des éléments très importants.

C'est dans un effort, d'une part, pour contribuer au progrès de la connaissance et d'autre part, pour répondre à un besoin qui est de plus en plus répandu et manifestement éprouvé par les opérateurs dans le champ de la gestion de projet que ce document s'intéresse à **l'allocation des ressources et le compromis durée-coût-qualité**. L'objectif général de ce travail est donc d'élaborer une méthode permettant d'aider le gestionnaire de projet à trouver le dosage adéquat entre l'allocation des ressources et les trois contraintes du triangle vertueux.

La question spécifique de la recherche consiste quand à elle à mettre au point un modèle permettant de répondre aux besoins du gestionnaire de projet dont la fonction est d'optimiser l'allocation des ressources et le compromis entre la durée, le coût et la qualité.

Dans ce travail nous sommes inspirés des modèles développés par Babu et Suresh, (1996) et Ahn, et Erenguc, (1998) pour développer le notre. En effet, trois fonctions-objectifs seront élaborées permettant d'optimiser la durée, le coût et la qualité dans un contexte de multiplicité des modes.

Le travail consiste en une reformulation de la façon d'allocation des ressources aussi bien initiales que supplémentaires tout en s'approchant au plus de la

réalité des projets par l'introduction de la notion des fonctions spécifiques pour l'allocation des ressources et les coûts afférents.

Ce travail sera présenté comme suit : dans un premier chapitre, il sera présenté le **cadre conceptuel (I)**. Dans un deuxième chapitre une **revue de la littérature (II)** sera exposée. Le troisième chapitre sera consacré à la **modélisation mathématique (III)**, alors que le chapitre (IV) présentera une **illustration du modèle** développé, avant de clôturer ce travail par une **conclusion** où nous exposerons brièvement certaines limites.

Chapitre I

LE CADRE CONCEPTUEL

La gestion de projet consiste à faire de façon efficace et efficiente le projet. Communément définie, la gestion de projet comprend la mise en œuvre d'un ensemble d'habiletés, de méthodes, de processus, d'outils et techniques afin d'optimiser l'utilisation des ressources allouées sur le projet. La performance de la gestion de projet est d'usage considérée comme l'atteinte du compromis entre la durée, le coût et la qualité. Ce compromis est souvent difficile à atteindre lorsque le budget est fixe ou légèrement révisable permettant une éventuelle accélération du projet afin d'atteindre la date d'achèvement souhaitée.

Différents concepts sont à utiliser dans ce travail, c'est pour cette raison que nous prenons le soin de les introduire successivement comme suit: 1/ Accélération de projet, 2/ Allocation des ressources, 3/ Compromis durée-coût-qualité et 4 / Performance du projet.

1/ Accélération de projet

Si le gestionnaire de projet ainsi que les différentes parties prenantes se mettent d'accord sur les caractéristiques du projet : le coût, les délais et la qualité ; il n'en demeure pas moins, qu'au cours de route plusieurs éléments interviennent et rentrent en jeu pour modifier une ou plusieurs des spécificités du projet (retard dans les premières phases de réalisation de projet, demande émanant du client, conditions climatiques imprévues, etc.). Comme le projet est composé d'éléments inter-reliés, la variation d'un élément peut affecter la variation d'autres. Toutefois, quel que soit le problème, le gestionnaire de projet doit le résoudre à l'intérieur du triangle vertueux afin d'achever le projet notamment dans les délais prévus.

Pour ce faire, le gestionnaire de projet est appelé souvent à accélérer certaines activités, essentiellement celles critiques sur la base desquelles la durée du projet est calculée. En effet, l'accélération consiste à une diminution de la durée «normale» du

projet pour le réaliser plus tôt que convenu. L'accélération du projet se fait généralement par l'allocation de ressources additionnelles, et cette opération a des incidences directes sur les autres paramètres du projet.

La durée normale d'une activité représente le temps nécessaire pour la compléter lorsque le niveau «normal» des ressources est affecté. Alors que la durée minimale d'une activité, représente le plus court délai techniquement possible pour la réalisation de ladite activité et nécessite donc l'utilisation d'un niveau maximal possible de ressources (Phillips et Dessouky, 1977).

2/ Allocation des Ressources

Plusieurs sortes de ressources sont, souvent, à la disposition du gestionnaire de projet qui est tenu d'en assurer une utilisation efficiente. Il s'agit des ressources matérielles, financières, informationnelles et humaines (Gordon et Tulip, 1997). Une autre classification des ressources peut être avancée, il s'agit des ressources renouvelables, non renouvelables et les ressources doublement limitées (Talbot, 1982). Toutefois, le gestionnaire de projet doit s'assurer que les ressources soient utilisées à un travail productif plutôt que de simplement jongler avec les budgets, les types et la quantité des ressources.

Les projets sont aujourd'hui de plus en plus variés et complexes, mettant souvent en lien plusieurs ressources notamment des ressources humaines de disciplines différentes et voire de nationalités, de races et de cultures différentes. A cause de ces différences, des conflits peuvent surgir nécessitant une intervention adéquate de la part du gestionnaire du projet.

Mais, à côté de cela, d'autres problèmes non moins importants doivent retenir l'attention du gestionnaire du projet. Il s'agit notamment du problème d'allocation de

ressources, définies traditionnellement par limitées. D'autres conflits surgissent alors, qui sont liés à la planification, l'ordonnancement ou l'affectation, et qui ne manquent pas de prendre du sérieux lorsque des activités nécessitent des ressources communes non disponibles qu'en quantités limitées (M. Chelaka, et al. 2001). S'ajoutant à cela une incertitude au niveau de la qualification du personnel qui oscille entre le niveau servant de base d'estimation et le niveau réel.

D'un autre côté, il est généralement admis que, plus on affecte des ressources pour effectuer une tâche, moins importante est la durée du travail. Dit autrement, la quantité de travail (la charge du travail) demeure inchangée, seules, les variations s'effectuent au niveau des ressources et de la durée. Le gestionnaire de projet, se trouve souvent dans de telles situations où l'accélération de projet par l'allocation des ressources supplémentaires se présente comme l'ultime solution pour honorer à ses engagements.

En effet, confronté à tous ces problèmes, le gestionnaire de projet doit chercher un compromis lui permettant de déterminer adéquatement les types, le nombre (et/ou la quantité) et les compétences des ressources disponibles et nécessaires pour la réalisation de chaque activité et bien sûr la réalisation du projet.

3/ Le compromis durée- coût- qualité

Aujourd'hui, le respect des trois contraintes n'est plus une option mais c'est une nécessité. Le client, se montre chaque fois plus exigent et le respect du délai, du coût et de la qualité n'est plus satisfaisant.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés au compromis durée-coût (Siemens, 1971, Phillips et Dessouky, 1977 et Goyal, 1975) ou au compromis durée ressource (Simin et Steven, 1996), mais peu de recherches se sont penchées sur la question de compromis durée-qualité ou de coût-qualité. Le résultat d'un tel compromis n'est pas évident et n'est pas non plus non problématique (Khang et Myint, 1999). La difficulté

réside en fait au niveau de la relation au sein du couple qualité-activité et par la suite au niveau qualité-projet dans son ensemble. Je pense aussi que les gestionnaires de projet sont réticents à envisager d'améliorer un niveau de qualité déjà acceptable à des dépenses supplémentaires ou en retardant la date d'achèvement du projet.

Quatre types de compromis sont à introduire dans les paragraphes qui suivent, il s'agit du compromis coût-qualité (a), du compromis durée-qualité (b), du compromis durée-ressource (c) et finalement du compromis durée-coût (d).

a- Le compromis coût-qualité

Ce compromis suppose le maintien d'un niveau de qualité acceptable tout en baissant le coût du projet. Dans ce cas la décélération de certaines activités critiques devient inévitable, ce qui va prolonger par conséquent la durée totale du projet.

Ceci suppose aussi que la qualité initialement définie soit acceptable car on admet mal qu'elle le soit à un niveau bas. D'emblée, si c'est le cas, le compromis coût-qualité serait d'améliorer la qualité à un niveau jugé satisfaisant à moindre incrément de coût.

b- Le compromis durée-qualité

Souvent le budget consacré à la réalisation du projet est peu flexible et ce compromis suppose un achèvement précoce du projet. Or la diminution de la durée du projet exige soit des nouvelles allocations des ressources, soit l'augmentation de la charge de travail (heures supplémentaires) ce qui engendre des coûts supplémentaires (Ahn, et Erenguc, 1998).

c- Le compromis durée-ressource

Le coût d'achèvement d'une activité d'un projet est en réalité un coût cumulé de l'utilisation de plusieurs ressources variées (quant à leurs natures qu'à leurs modes d'engagement) nécessaires pour accomplir la tâche. Le problème de compromis durée-coût génère des coûts minimums en fonction du temps de réalisation du projet. Il

fournie de l'information sur l'augmentation minimale possible du coût du projet lorsque le temps de réalisation du projet diminue d'une unité de temps.

En effet, l'allocation de ressources supplémentaires permet d'accomplir la tâche plus vite que prévu et la diminution de la durée engendre une augmentation dans la consommation des ressources nécessaires. Celles-ci peuvent être renouvelables, non renouvelables ou même à double contraintes (Slowinski, 1980).

En règle générale, la minimisation du coût du projet n'est pas le seul objectif souhaité. Il y aura des ressources essentielles (critiques ou dispendieuses) pour lesquelles il est souhaitable de réduire au minimum le montant de leurs consommations. Le problème de compromis durée-ressource fournit des informations sur combien la consommation de chaque ressource (ou son coût) sera majorée si la durée du projet diminue d'une unité de temps.

d- Le compromis durée-coût

Le coût d'achèvement d'une activité du projet est en réalité un coût cumulé de l'utilisation de plusieurs ressources nécessaires pour l'accomplir. Souvent, suit à une demande émanant du client, le gestionnaire se trouve contraint de terminer le projet avant la date prévue.

L'accélération de projet engendre, certes, une consommation de ressources supplémentaires ce qui aura une incidence sur le coût global, néanmoins, le gestionnaire de projet est invité à assurer le meilleur dosage entre le raccourcissement de la durée et l'augmentation de coût. En effet, toute action faite sur les ressources aura pour conséquence une variation au niveau du coût et/ou du délai et/ou de la qualité.

D'un autre côté, la durée d'achèvement d'une tâche diminue si une unité supplémentaire de ressource est affectée pour réaliser cette même tâche. Les unités de

ressources additionnelles ou en moins, ont une incidence simultanée et opposée sur la variation des coûts et du délai (Phillips et Dessouky, 1977).

Aussi, comme l'allocation d'une unité supplémentaire d'une ressource engendre un coût supplémentaire, on a souvent tendance à considérer directement les ressources comme des coûts. Mais cette tendance n'est pas sans inconvénient. Le fait d'exprimer les ressources monétairement ne donne pas au gestionnaires de projet des renseignements fiables sur les types de ressources engagées ni non plus sur leurs qualités (niveau de performance) ou leurs aptitude notamment en cas de projet complexe faisant appel à des ressources variées.

4 / Performance du projet

De point de vue opérationnel, le succès ou la performance désigne l'accomplissement d'un travail, d'une œuvre ou d'un exploit, la manière avec laquelle un organisme réagit à des stimuli qui lui ont été imposés ou proposés.

Le succès de projet a été largement discuté dans la littérature. D'après la plupart des recherches dans la gestion de projet jusqu'à ce jour, la réussite se mesure par la réalisation du projet à date, dans le budget et la qualité spécifiés (Babu et Suresh, 1996). D'ailleurs, tous les articles traités au titre de ce travail admettent ce principe. Ainsi, le succès dans une approche traditionnelle, se mesure en se référant à la triple contraintes de coût, de délai et de qualité.

Mais il est important de signaler que pendant ces derniers temps, peu de regards se sont tournés vers une autre forme de succès associée au raccourcissement du délai, à la hausse minimale du budget et l'amélioration de la qualité. De surcroît, la réussite du projet fait que l'attention du chercheur est de plus en plus orientée vers des buts plus importants semblent-ils, classés à un niveau élevé. Et chaque fois, notons-le,

des nouveaux buts viennent s'ajouter à ceux initiaux expliqués par l'exigence accrue des différentes parties prenantes et notamment le client (Shamas et Ogunlana, 2010).

Néanmoins, même si de nouveaux buts viennent prendre place, la tradition fait qu'ils ne peuvent pas déstabiliser la position du triangle vertueux en tant qu'éléments de base de la performance de la gestion de projet notamment par les professionnels. Ces nouveaux buts trouvent origine, peut être, en la présence ou l'absence de certains éléments. Comme par exemple la nature du projet, les conflits, les intérêts, le nombre des intervenants et des parties prenantes, etc. Si les composantes ou les spécificités de ces derniers éléments ne sont pas toutefois certaines au titre de leurs existences, la présence d'un budget, d'un échéancier et des spécificités techniques, demeurent présents et accompagnent tout projet.

C'est dans cette voie que nous continuons et analysons plus en profondeur la notion de compromis en gestion de projet. Nous discutons alors dans le chapitre II : le compromis en gestion de projet entre la durée, le coût et la qualité ainsi que le problème d'allocation des ressources tout en exposant une revue de la littérature.

Chapitre II

LE COMPROMIS EN GESTION DE PROJET

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Telle que définie par Oisen (1971), la gestion de projet est la mise en application d'un assortiment d'outils et techniques dans le but d'orienter des ressources vers l'accomplissement d'un projet unique, ponctuel et souvent complexe, sous les contraintes de coût, de délais et de qualité.

Si cette définition paraît incomplète et essentiellement orientée action, elle peut être complétée par celle fournie par Babu et Suresh (1996). D'après ces derniers, la gestion de projet consiste en la planification de projet, le suivi et le contrôle. La planification de projet comprend la définition des spécifications de travail, la détermination de la qualité du travail et l'estimation des ressources nécessaires.

Ces étapes permettent, toujours selon Babu et Suresh (1996), de réaliser un ensemble d'activités afin d'atteindre un objectif spécifique, qui est bien entendu, le projet. Le projet qui est, rappelons-le, un ensemble d'activités qui doivent être complétées dans une séquence pré-arrangée (Phillips 1996).

Ces définitions mettent l'accent sur la planification ainsi que son rôle dans l'accomplissement du projet et l'atteinte du succès par un meilleur compromis durée-coût-qualité.

Cela n'est pas étonnant dans un marché où une bonne maîtrise et organisation des ressources et un bon ordonnancement des activités se répercutent favorablement sur les trois éléments de l'efficacité opérationnelle de la gestion de projet et par la suite sur l'efficacité du projet.

Depuis des décennies, des efforts importants ont été fourni afin de développer des techniques efficaces pour résoudre le problème d'optimisation dans la gestion de projet. Ces efforts ont abouti à l'élaboration de plusieurs travaux intéressants.

La quasi-totalité des recherches, ont poursuivi pratiquement les mêmes objectifs incluant une méthode plus au moins efficace d'optimisation des coûts et de

raccourcissement de la durée d'un projet lorsque la durée prévue du projet est incompatible (dépasse) avec la durée prédéterminée ou imposée par les exigences du client notamment.

Mais à travers notre revue de la littérature nous avons pu dégager certaines défaillances dont nous prenons le soin de les exposer au fur et à mesure dans le développement qui suit.

Le chapitre II sera organisé en cinq paragraphes intitulés successivement comme suit : 1/ Le compromis durée-coût, 2/ Le compromis durée-ressources, 3/ Le compromis durée-coût-qualité, 4/ L'allocation des ressources et finalement 5/ Le compromis en présence de diversité de modes.

1/ Le compromis durée-coût :

Deux méthodes constituent les principales approches utilisées pour résoudre le problème de compromis durée-coût, il s'agit de l'approche mathématique (approche dite exacte ou optimale) et l'approche heuristique (méthode dite de règle de pouce). Si la première se caractérise par l'efficacité et la précision, la deuxième se caractérise par le réalisme (Burns et al. 1996).

Fulkerson, (1961) a développé un algorithme de flux de réseau pour minimiser les coûts. Il a proposé un modèle linéaire permettant de déterminer le coût optimal de projet par le calcul de la courbe de moindre coût. Il offre aussi la possibilité de calculer les courbes des coûts du projet aux cas où les différents coûts relatifs aux différentes tâches sont continues par morceau ou convexe. Seulement, la variation de la durée d'une activité peut être une augmentation ou une diminution dans le sens où une activité réduite à une étape précédente peut être autorisée à augmenter à un stade ultérieur si cette réduction devrait devenir plus tard redondante.

Fulkerson (1961) et Kelley (1961) ont été les premiers à proposer une solution à ce problème. Ceux-ci ont présenté des résultats complètement indépendants, mais les deux approches sont essentiellement les mêmes. En utilisant l'hypothèse de la fonction de coût linéaire continue, le problème a été formulé sous forme d'un problème de programmation linéaire principale.

Le problème à double sens a été établi et résolu en utilisant une procédure de flux de réseau en introduisant deux arcs pour chaque activité de projet (accélération et décélération). Un exemple typique est prévu lorsque le temps d'achèvement du projet ne peut pas rencontrer, par le cours normal des activités, la date fixée. Le problème consiste alors à déterminer quelles activités accélérer et dans quelle mesure les diverses activités doivent être raccourcies permettant de respecter la date d'achèvement imposée ou prévue.

Nombreux chercheurs se sont inspirés des travaux de Fulkerson (1961) et aussi de Kelley (1961) pour mener les leurs.

En utilisant une approche heuristique, Siemens (1971) a tenté de résoudre le problème de compromis durée-coût par la mise au point d'un algorithme valable pour une relation linéaire entre la durée et le coût. En effet, L'algorithme «Siemens Approximation Method» (SAM) vise à réduire la durée du projet lorsqu'elle dépasse une limite prédéterminée. Cet algorithme permet d'identifier les activités à accélérer tout en spécifiant l'étendu et en assurant une augmentation minimale de coût (Siemens, 1971).

Par rapport aux méthodes et solutions proposées par Fulkerson (1961) et Kelley (1961), l'algorithme SAM se montre plus avantageux et plus simple dans son application. Mais, même s'il présente une certaine simplicité, il ne permet guère garantir l'obtention des solutions optimales, et même si c'est le cas, aucun moyen ne permet de vérifier l'optimalité des dites solutions.

En revanche, dans un travail plus poussé fait par Goyal (1975), une technique a été proposée améliorant l'algorithme SAM permettant, par une nouvelle définition donnée à la pente de coût, de raccourcir encore les activités qui ont été déjà raccourcies. Mais, malgré même cet effort, le nouveau modèle, toutefois linéaire, ne garantit pour autant pas une constante fiabilité ni non plus un résultat meilleur dans tous les cous que l'algorithme de Siemens.

Phillips et Dessouky, (1977) essayent dans leur recherche d'identifier les activités dans un projet qui devraient être raccourcies afin de diminuer la durée totale du projet à un montant déterminé et qui soit minime. Toutefois, une activité accélérée dans un premier temps, pourrait être en cas de besoin décélérée. Il s'agit d'un modèle heuristique permettant de résoudre les fonctions, liant la durée et le coût, de type linéaire, non linéaire ou discrète.

Ils affirment l'importance que doit accorder le chef de projet à l'allocation des ressources supplémentaires qui, elles, permettent d'accélérer la réalisation de certaines activités du projet et donc l'achèvement du projet à une date précoce.

Phillips et Dessouky (1977) considèrent toutefois les ressources comme un coût composé des coûts élémentaires résultant de l'utilisation des différentes ressources pour la réalisation d'une tâche déterminée, et ignorent les spécificités de chacune d'elle ainsi que le mode de son allocation. Phillips et Dessouky (1977) proposent une procédure de solution pour résoudre le problème de compromis durée-coût pour réduire la durée de projet à un coût minimum. La solution au problème de durée-coût est obtenue en faisant une coupe minimale dans un réseau provenant du réseau initial du projet. Cette coupe minimale est aussi utilisée pour identifier les dites activités qui devraient connaître une réduction de la durée, afin de parvenir à écrouter la durée totale du projet.

Un autre algorithme fut développé par Burns et al. (1996) nommé le modèle LP/IP (Combinaison entre une programmation linéaire et une programmation en nombres

entiers) permettant de déterminer au mieux le choix des ressources pour optimiser aussi bien la durée que le coût. Le modèle se fonde sur une approche mathématique avec une fonction durée-coût linéaire continue ou discrète.

Burns et al. (1996), Ahn et Erenguc (1998), Bert et al. (1998) et Tung (2007) s'accordent tous sur le fait que les décisions prises concernant l'équipe et les équipements, et les méthodes de réalisation des travaux déterminent la durée et le coût du projet, mais ne soulèvent pas la question du mode d'allocation des ressources, ni leurs spécificités ni non plus le problème de la qualité du projet. Ces décisions ne semblent pas faciles à prendre, lorsque notamment le nombre des activités d'un projet dépasse une certaine limite (100 activités selon Burns et al. 1996). Il est dès lors impossible d'identifier la ou les bonnes décisions permettant la réalisation du projet rapidement et à moindre coût.
En outre, les relations durée-coût peuvent être constituées de pièces discontinues, c'est à dire définies au niveau des régions distinctes. Cela se produit lorsqu'une activité peut être réalisée par diverses méthodes, dont chacune conduit à des différentes sortes de délais et de coûts.

En effet, même s'il paraît un peu plus compliqué que les autres modèles, l'application du modèle LP/IP permet de gagner plus de temps et favorise un accès aisé à une solution optimale. Cette dernière parait souvent, pour les gestionnaires de projet, impalpable surtout pour les grands projets à réseaux étendus et complexes (Burns et al. 1996).

En pratique, les activités d'un même projet ont différents types de fonctions durée-coût (Moussourakis et Haksever, 2004). Le mélange arbitraire de morceaux linéaires, non linéaires (convexe et/ou concave), et les relations discrètes constituent un problème complexe qui est difficile à résoudre par les techniques d'optimisation classiques, telles que la programmation linéaire et la programmation en nombres entiers (Tung, 2007, p. 638).

Ce que nous constatons dans les travaux des auteurs qui viennent d'être cités c'est que seules deux variables ont fait l'objet de leurs recherches. Le fait de regrouper les ressources sous le seul volet monétaire tout en ignorant l'identité de la ressource, sa nature et sa compétence pour la réalisation d'un travail donné, constitue une faiblesse et une grave négligence quant à la réalité des projets.

Faire la sommation des coûts des différentes ressources pour l'accélération par exemple d'une activité ne permet pas au preneur de décisions de déterminer la quantité à allouer de chaque type des ressources ni son niveau de performance ni la qualité totale de travail notamment dans un contexte de multiplicité des ressources. Cette tendance ne fait que simplifier le problème ou plutôt amoindrir un problème complexe tout en marginalisant des aspects inexprimables monétairement.

Ces auteurs se sont appuyés seulement sur la durée et le coût, alors que le coût tel qu'il est coutumièrement défini par le triangle vertueux comme une variable agrégée, ne respecte en rien les éléments qui le composent.

D'une part, cela explique, d'après nous, la supériorité de résoudre le problème en tant que compromis durée-ressource que celui de compromis durée-coût et d'autre part encourage une désunion entre le coût et les différentes ressources. Nous pensons que cette vision incite fortement dans un premier temps à réviser les paramètres du triangle vertueux tel qu'il sera proposé plus tard et dans un deuxième temps à mettre l'accent sur le compromis durée-ressources.

2/ Le compromis durée-ressources

En gestion de projet, tous les auteurs s'accordent sur le fait que pour accélérer une activité, il faut engager des ressources supplémentaires suscitant inévitablement des coûts additionnels. Comme il vient d'être stipulé plus haut, le coût additionnel est souvent

calculé comme un coût agrégé regroupant tous les coûts élémentaires sans distinguer la nature de chacune des ressources engagées.

Cette pratique n'est pas sans doute commode pour résoudre le problème d'accélération que fait face fréquemment le gestionnaire de projet. Il est alors plus approprié de considérer et de gérer la relation entre la durée et les ressources plutôt que la relation entre la durée et le coût.

Notons avant de passer que lorsqu'on parle de multiplicité de modes, la notion durée-ressource est quasi-présente, vu que le changement d'un type (et/ou de la quantité) d'une ressource fait naître, d'après certains auteurs des nouveaux modes envisageables.

L'objectif d'achever le projet avec succès s'exprime dès lors par un adéquat équilibre entre l'allocation des ressources et la durée. Le gestionnaire de projet aura pour mission d'optimiser l'utilisation des ressources, la durée et le coût. À cet effet il doit réaliser le projet le plus tôt possible (durée) tout en minimisant la quantité de ressources engagées (ressources) afin de minimiser le coût (coût).

Ainsi, la durée est une fonction décroissante des ressources que consomme chaque activité. Dans ce contexte la durée est bornée par une valeur maximale (généralement la durée normale de l'activité) et une valeur minimale correspondante à la durée accélérée de l'activité.

Pareillement, la quantité de ressource additionnelle est limitée par la quantité de ressource disponible et la limite maximale possible de ressource à engager pour l'achèvement de l'activité. Il est toujours utile de rappeler que le coût total du projet ne doit guère dépasser le budget préalablement fixé.

La résolution du problème de compromis durée-ressources offre au gestionnaire de projet un meilleur contrôle des ressources ainsi que sur leurs

contributions. Mieux encore, il lui sera facile de déterminer quel type de ressource et en quelle quantité sont indispensables pour réduire la durée d'une unité de temps par exemple. Au bout de ligne, cette maîtrise lui permet de préserver la qualité du projet dans sa totalité. Plusieurs grandeurs sont à considérer par le preneur de décisions dont la disponibilité, la compétence et l'expérience.

Simin et Steven (1996) se sont penchés sur la résolution du problème de compromis durée-ressources et ont réussi à établir un modèle qui semble être, à la fois, avantageux et plus ambitieux. En effet, l'algorithme MOLP (Multiple Objective Linear Programming) utilise la technique de compromis durée-coût pour résoudre le problème de durée-ressource (Simin et Steven, 1996).

En effet, les objectifs du modèle de la programmation linéaire à objectifs multiples qui a été discuté aussi par Deckro, et Hebert, (1990) consistent en la minimisation du coût du projet, la réduction de la durée du projet et la minimisation du temps de réalisation d'un nœud spécifique.

Ce modèle permet, lors d'un problème de compromis durée-ressources, d'identifier l'augmentation dans la consommation de chaque ressource (ou son coût) au cas où la durée du projet diminue d'une unité. Toutefois, ces auteurs insistent sur le fait que les activités ne doivent pas être réduites au-delà de leurs limites techniquement admissibles.

Au lieu de dégager donc une seule relation entre la durée et le coût, seront dégagées différentes relations entre chaque ressource et la durée (Simin et Steven, 1996). Notons enfin que leur modèle demeure malgré tout fondé sur la relation durée-coût et non pas sur la relation durée-ressource.

Même s'ils ont développé un modèle linéaire plus ou moins d'application limitée, leur travail est d'une très grande valeur ajoutée. En effet, Simin et Steven (1996),

introduisent la notion d'objectifs multiples dans un contexte de multiplicité de ressources. Le coût de l'allocation des ressources indispensables pour l'achèvement de chaque activité est représentée par une fonction linéaire dépendante de la valeur d'un paramètre ``α`` oscillant entre 0 et 1 ($\alpha \in [0,1]$) et cela indépendamment de la relation linéaire entre la durée et les ressources.

Dans le même sens d'idées, nous pensons que l'adoption des fonctions d'allocation des ressources elles mêmes seront plus utiles. En effet, étant variées, chaque ressources possède dans la réalité une fonction spécifique propre à une activité donnée afin de l'accélérer d'une certaine durée.

Comme il a été mentionné implicitement par nombreux chercheurs, le problème de pilotage de projet sous les contraintes de ressources est au cœur de la réussite du projet. D'ailleurs, ils mettent amplement l'accent sur l'opération d'allocation des ressources en tant que principal élément à considérer dans la résolution du compromis durée-coût. Même s'ils admettent son importance, cette voix n'a pas connu trop de développement comparativement au compromis durée-coût ce qui suscite notre intérêt à y attacher plus d'attention.

C'est pour cette raison que nous nous penchons sur cette question en adoptant l'idée que chaque ressource possède sa propre fonction relativement à chaque activité (le couple ressource-activité).

A notre sens, la minimisation du coût du projet et sa durée ne constituent pas les seuls objectifs souhaités, il y aura, notamment, des ressources surtout critiques pour lesquelles il est préférables de réduire le montant de leurs consommations. Les ressources critiques peuvent être des ressources initiales ou supplémentaires mais qui coûtent très chères.

À côté des ressources, Phillips (1996) admet que l'intention doit être orientée vers la durée du projet. Il fait un lien direct entre l'allocation des ressources et le raccourcissement de la durée du projet, et l'objectif serait alors de déterminer les activités qui devraient consommer plus de ressources en terme de quantité ou en terme de coût afin de diminuer leurs durées respectives et par ricochet le coût total du projet. Son approche heuristique présente un algorithme qui permet d'identifier l'état de chaque activité, de déterminer si elle est critique ou non et de déterminer aussi si elle est de durée normale, intermédiaire ou totalement réduite.

C'est un algorithme fondé sur une approche d'exploration graphique par coupe permettant d'identifier le niveau minimal des ressources à chaque réduction dans la durée du projet. Hormis son originalité, cet algorithme reste limité aux petits projets avec un nombre d'activités et de ressources réduit. D'ailleurs dans son travail, il n'a prévu qu'un seul type de ressource qui s'écarte nettement de la réalité des projets.

3/ Le compromis durée-coût-qualité

Deux vieilles techniques sont essentiellement utilisées dans la gestion de projet comme outils de base. Il s'agit de la technique CPM (Critical path method) et PERT (Program Evaluation and Review Technique). Si Babu et Suresh (1996) et Khang et Yin Mon (1999) s'accordent sur la méthode CPM en tant que technique fondamentale pour la gestion de projet, il n'en demeure pas moins qu'elle reste limitée et inadaptée pour la prise de décisions et des mesures essentielles concernant la qualité.

Il ne va pas sans dire que les techniques CPM et PERT sont largement utilisées comme outils de management pour la planification et le contrôle des projets. D'après Nudtasomboon et Randhawa (1997) ces techniques ne sont pas adaptées à la réalité du projet puisqu'elles considèrent son achèvement le plus tôt possible dans un contexte de non limitation des ressources. Même si les ressources sont vraiment non

limitées, cette hypothèse n'est toutefois pas justifiée puisque le coût total du projet est généralement fixé. La notion de la qualité quant à elle passe sous silence.

Bien que la recherche et l'analyse du problème de compromis durée-coût ait été développée dans la littérature, l'analyse du problème de compromis de la durée, du coût et de la qualité simultanément n'a presque pas été abordée (Babu et Suresh, 1996). A notre connaissance, seuls quelques chercheurs se sont intéressés au compromis entre les trois éléments du triangle vertueux. Le triangle vertueux dont les trois côtes (ou ses angles) représentent trois paramètres à gérer par le gestionnaire de projet.

A notre sens, nous pensons que, même si la notion de triangle vertueux est largement utilisée et admise par les chercheurs et les praticiens, elle reste malgré tout incomplète et ne représente pas fidèlement la vérité des contraintes aux quelles est soumis un projet.

En effet, certains travaux montrent qu'il est possible de réduire la durée de certaines activités non critiques pour accélérer d'autres critiques (Willey et al. 1998). Ainsi, seulement une nouvelle distribution des ressources permet de réduire la durée totale du projet sans pour autant engendrer des coûts supplémentaires.

D'autre part, un changement au niveau des ressources allouées par l'affectation de certaines ressources à la place d'autres peut avoir des incidences sur l'une et/ou l'autre des dimensions du triangle, c'est-à-dire une incidence soit individuellement soit simultanément sur la durée, le coût et la qualité. Dans ce sens et à l'instar des autres composants, l'allocation des ressources retient inévitablement l'attention du preneur de décisions lors de la résolution du problème de compromis.

Une quatrième dimension nous semble donc intéressante de l'intégrer et qui représente l'essentiel élément causant des variations au niveau des trois dimensions

traditionnelles du triangle vertueux. C'est pour cette raison que nous jugeons commode d'intégrer la dimension (ressource) dans le concept du triangle vertueux.

À cet effet, nous pensons qu'une représentation en cercle sera plus fidèle que le triangle vertueux. Un cercle vertueux réparti en quatre parties représentant les trois contraintes habituelles coût, durée et qualité auxquelles on ajoute les ressources.

Il est communément admis que lorsque la quantité des ressources allouées augmente le coût du projet augmente avec une réduction de la durée résultant souvent à une baisse au niveau de la qualité comme le montrent les figures suivantes (figure No.1 et 2).

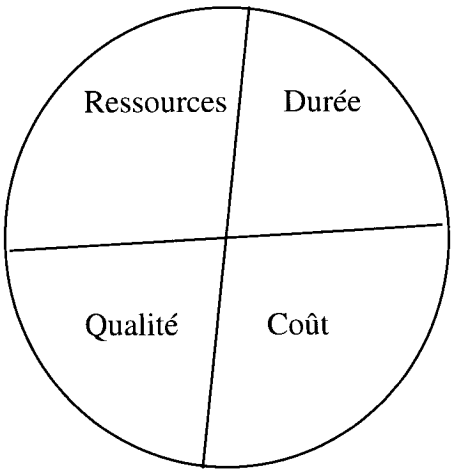


Figure No. 1 : cercle vertueux allocation (Durée normale)

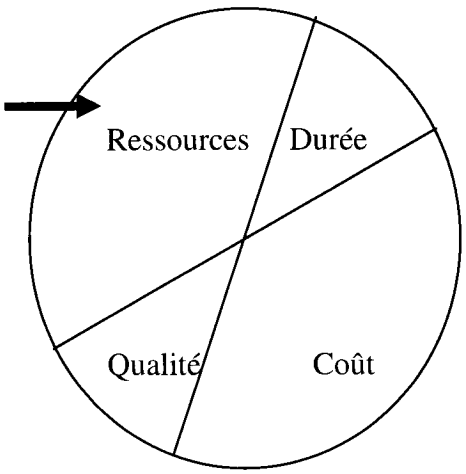


Figure No. 2 : Cercle vertueux après des ressources supplémentaires

Généralement, les auteurs admettent qu'une gestion de projet réussie assure la réalisation du projet à temps, en respectant le budget et les spécifications du projet. L'un des problèmes qui ont été largement traités est celui de déterminer les activités sujettes à réduction ou à étendue de réduction sans pour autant inclure les frais qui peuvent en découler ou même et surtout la qualité du projet qui risque de se détériorer par l'accélération de la durée nécessaire pour la réalisation du projet. L'accélération d'une

activité peut entraîner des frais supplémentaires, des ressources spécialisées et aussi l'usure rapide des équipements (Babu et Suresh, 1996).

Intéressés par les trois contraintes, Babu et Suresh (1996) ont développé un modèle linéaire à trois fonctions permettant chaque fois d'optimiser l'une des trois contraintes de durée, de coût ou de la qualité tout en donnant des limites acceptables pour les deux autres.

Le modèle étant simple et facile à utiliser, mais présente toutefois un problème de choix de la meilleure combinaison de durée-coût-qualité. La qualité, quant à elle, est supposée osciller entre les valeurs zéro et un. Le travail de Babu et Suresh (1996) demeure l'un des rares travaux qui a retenu en considération la qualité de la gestion de projet et son altération suite à une accélération de la durée.

Khang et Yin Mon (1999) confirment aussi, lors d'un travail effectué pour évaluer l'applicabilité de la méthode mise au point par Babu et Suresh (1996), que le fait de réduire la durée avec un budget supplémentaire peut affecter la qualité du projet, sa performance et par ricochet sa réussite.

Mais il est nécessaire de préciser que généralement le niveau de qualité initial soit du moins acceptable, car on admet mal d'envisager dès les premières phases du projet un niveau de qualité bas. À notre avis, les gestionnaires de projet sont aussi réticents à envisager d'améliorer un niveau de qualité déjà acceptable à des dépenses supplémentaires ou en retardant la date d'achèvement du projet. D'ailleurs, la question d'amélioration de la qualité n'a jamais, à notre connaissance, été posée.

Seulement, selon les dires de Khang et Yin Mon (1999), le résultat le plus précieux pour les gestionnaires et les chercheurs, et qui est probablement surprenant pour certains, c'est le fait de reconnaitre qu'aux différents compromis durée-coût, il y aura des niveaux de qualité différents. Le niveau de qualité ne diffère pas seulement selon le

compromis durée-coût, mais aussi selon le mode d'achèvement du projet s'il en existe plus qu'un, ce qui est très souvent le cas.

Le fait de changer un type de ressource par un autre pour l'exécution d'une tâche, peut engendrer une durée et/ou un coût différent que si elle avait été réalisée par le premier type de ressource. La première combinaison de durée-coût-qualité relativement au premier type de ressource sera alors différente de la deuxième combinaison de durée-coût-qualité relativement au deuxième type de ressource. Ainsi, nous pouvons conclure, que pour chaque combinaison durée-ressource, il lui est associé un niveau de qualité correspondant.

4/ L'allocation des ressources

Comme il a été mentionné plus haut, l'engagement des ressources supplémentaires permet essentiellement de réduire, jusqu'à une certaine limite, la durée du projet. La réduction de la durée peut se faire, selon Ahn et Erenguc (1998), de trois diverses manières : le recours aux heures supplémentaires, la création de poste additionnels et l'allocation de ressources supplémentaires, même si la création de poste revient en fin de compte à allouer des ressources supplémentaires.

Ahn et Erenguc (1998) prévoient que le problème de compromis durée-coût regroupe naturellement deux types de problèmes, celui du compromis durée-coût (TCTP) proprement dit et celui de l'ordonnancement du projet avec ressources limitées (RCPSP).

Telle qu'elles sont catégorisées par certains auteurs, à l'instar notamment Slowinski (1980) et Talbot (1982), trois sortes de ressources possibles. Les ressources renouvelables, non renouvelables et celles doublement limitées. La ressource est dite renouvelable lorsqu'elle est disponible seulement en quantité limitée pendant chaque période comme par exemple la ressource humaine. Lorsque la quantité totale de consommation d'un type de ressource pendant une durée donnée soit limitée, on parle

alors de ressource non renouvelable comme les matériaux par exemple ou le budget. Une ressource est considérée doublement limitée c'est lorsque les deux conditions précédentes soient réunies. Le budget aussi peut être un exemple de ressource doublement limitée.

La quasi-totalité des auteurs retiennent dans leurs modèles soit les ressources renouvelables soit celles non renouvelables qui sont nommées par Peng et Wang (2009) les ressources d'occupation et les ressources de consommation. Ces dernières sont généralement des ressources non renouvelables telles que les matériaux.

Ils prévoient que les coûts générés par les ressources humaines peuvent être divisés en deux parties. Une première constitue le salaire qui est généralement versé par l'entreprise périodiquement (coût indirect), l'autre partie, étant le montant payé par le chef de projet qui est basé sur la performance dans le projet (coût direct). Dans ce sens, Peng et Wang (2009) retiennent le principe selon lequel le projet est une partie intégrante de l'entreprise qui le gère et à cet effet, toute accélération nécessite des ressources supplémentaires (des heures supplémentaires) ce qui explique l'augmentation du coût direct.

Mais quel que soit la nature de la ressource, son allocation est toujours supposée connue et fixe. Deux manquements sont encore à soulever au sujet de l'allocation de ressource, le premier concernant les ressources initialement engagées sur le projet et le deuxième concernant les ressources supplémentaires, engagées généralement pour accélérer l'achèvement du projet.

Pour les ressources initiales, nous avons constaté dans tous les travaux étudiés que le coût est déterminé et ne subit aucune variation ni vers la hausse ni vers la baisse suite à une réduction de la durée, alors qu'une diminution au niveau de la durée aura certainement une incidence sur les ressources initiales et le coût afférent (ou dit normal).

Nous nous accordons tous sur le fait que pour réaliser une activité, il faut une charge donnée de travail (exprimée en nombre de jours machine par exemple) qui est constante et généralement connue selon les règles du métier ou l'expérience. Lorsque la durée de l'activité baisse, la quantité de ressources doit augmenter pour maintenir la même charge de travail pour achever l'activité. La charge du travail pour une activité donnée étant toujours constante.

Nous admettons ainsi que lors d'une baisse de la durée, les ressources initiales ne seront plus engagées sur la totalité de la durée initiale mais plutôt pendant la durée réduite, ce qui traduit par une baisse au niveau de la charge du travail. Cette baisse sera compensée par l'allocation de ressources supplémentaires.

Prenant le cas d'une activité (i,j), dont :

- C : La charge totale de travail.
- Ci (Cs): Charge de travail des ressources initiales (supplémentaires).
- Dn (Dr): La durée normale (réduite) de l'activité (i,j).
- Qi (Qs) : La quantité de ressources initiales (supplémentaires) par unité de temps.
- On suppose par un souci de simplification que le taux d'utilisation des ressources est 100%.

Puisque (i,j) peut faire l'objet d'une accélération alors on peut dire que : $C = Ci + Cs$

Pour une durée normale (Dn) on a :

$$C = Qi * Dn = Ci$$

Pour une durée réduite (Dr) on a :

$$C = Qi * Dr + Qs * Dr$$

Puisque $Dr \leq Dn$ alors $Ci_{(Dr)} \leq C$

Pour compenser la différence il faut engager des ressources supplémentaires. Nous pouvons ainsi conclure que lorsque la durée d'une activité baisse la charge de travail des ressources initialement engagées baisse aussi, ce qui à une incidence sur le coût des ressources initiales engagées sur l'activité.

Pour les ressources supplémentaires, la coutume fait qu'elles sont considérées comme un coût agrégé qui suppose la connaissance au préalable du coût de chaque ressource supplémentaire et suppose aussi la connaissance de la quantité nécessaire pour chaque période de travail. La quantité de ressource supplémentaire est considérée souvent en fonction de l'accélération et indépendamment des variations de la durée.

Dit autrement, la quantité ou le coût de ressource supplémentaire est exprimé en fonction de la baisse de la durée comme par exemple il faut engager la quantité (Q) pour accélérer la durée D d'une unité. Mais la quantité (Q) est prise globalement et il n'y a pas une précision sur la quantité (q) qui doit être engagée tout au long de la période réduite d'une unité de temps (D – 1).

Il est aussi implicitement supposé que le mode d'allocation de ressource suit la même fonction du coût agrégé. D'un autre côté, et même si le coût des ressources supplémentaires pourrait suivre la même fonction quelle que soit la variation de la durée (souvent linéaire ou convexe), l'allocation de chaque ressource, quant à elle, peut suivre chacune une fonction différente ce qui ne donne pas vraiment une fonction de coût agrégé du type linéaire ou convexe comme il est d'usage de le considérer.

Nous pouvons être aussi en présence d'un cas où l'allocation de (Q) unités supplémentaires peut faire accélérer la réalisation de l'activité de deux à trois unités de temps par exemple. Donc, accélérer de deux à trois unités revient à engager la même quantité de ressource (Q). Si nous retenons le même principe pour d'autres niveaux

d'accélérations, la représentation graphique serait en palier. Nous retenons, pour illustrer notre propos, un exemple simple.

Soit une activité (i,j) prenant deux types de ressources (R_1 et R_2) dont les quantités indispensables pour accélérer l'activité sont telles que présentées dans le graphique ci-après.

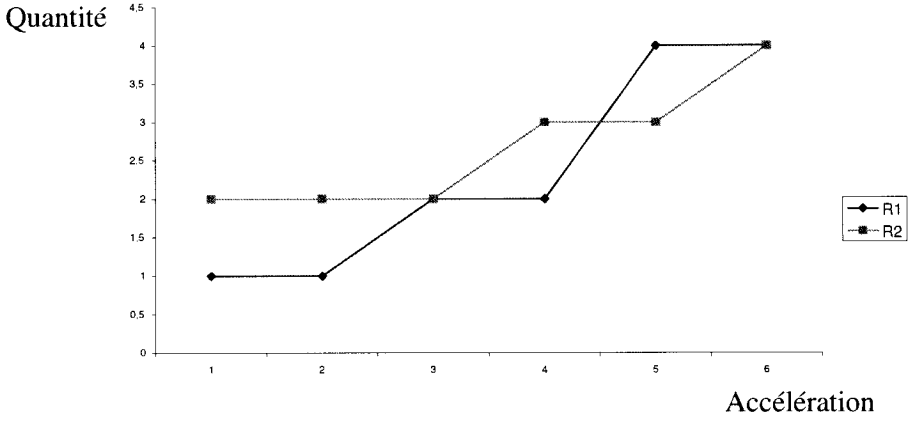


Figure No. 3 : Quantité de ressources nécessaires selon l'accélération

Si nous supposons que le coût unitaire des ressources R_1 et R_2 par unité de temps est de 3 et 5 unités monétaires respectivement, nous aurons alors la courbe de coût agrégé comme présenté dans le graphique suivant :

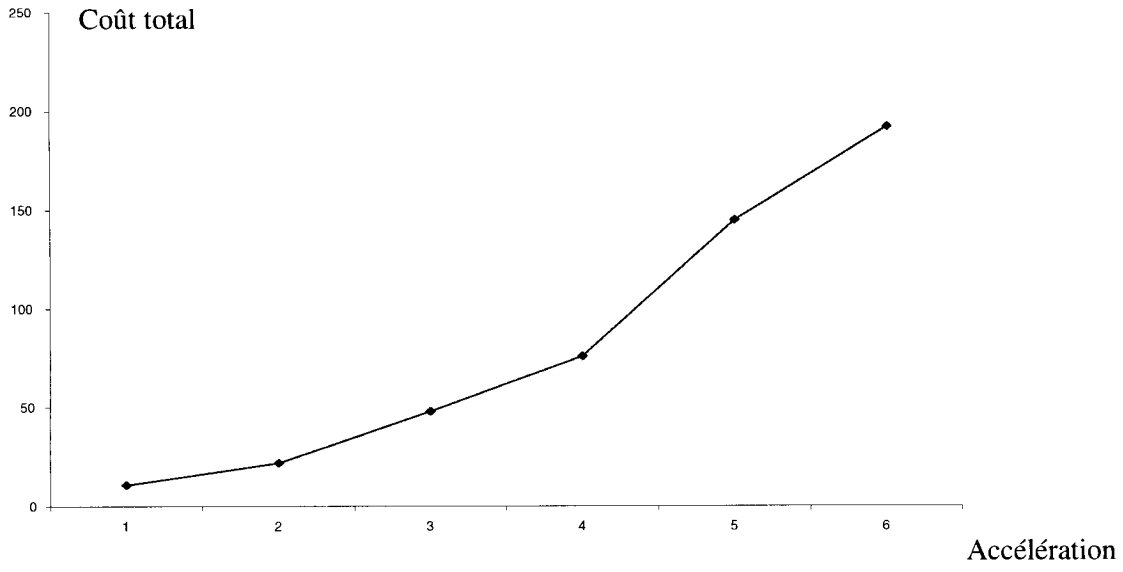


Figure No. 4 : Illustration graphique du coût relatif à l'accélération de (i,j)

En observant ce graphique nous pouvant aisément remarquer que la courbe dans son ensemble n'est pas linéaire et n'est pas non plus convexe. On pourrait avoir dans d'autres cas des courbes d'allures complètement aléatoires, lorsque notamment le coût par unité de temps baisse selon la durée ou selon la quantité (Falk et Horowitz, 1972). Ce qui veut dire aussi que, comme pour les ressources, le coût peut avoir sa propre fonction dépendamment (quantité) ou indépendamment (durée) de la fonction de l'allocation de ressource.

Pour résumer, trois points majeurs sont à considérer et dont nous y tiendrons comptes dans le développement qui suit :

- Une baisse de la durée entraine une baisse au niveau des ressources initiales ainsi que le coût normal.
- Une fonction spécifique pour l'allocation de chaque ressource supplémentaire et pour chaque activité.
- Le coût unitaire de chaque ressource peut avoir une fonction spécifique qui dépend de la quantité et/ou la durée.

Le changement d'une ressource par une autre pour la réalisation d'une activité donnée affecte directement la combinaison durée-coût-qualité de cette même activité. En effet, on passe alors d'un mode engageant un type de ressource bien déterminé à un autre mode engageant un autre type de ressource et par conséquent (ou le plus souvent) une combinaison durée-coût-qualité différente.

5/ Le compromis en présence de diversité de modes

Nombreux ceux qui ont considéré le contexte de mode unique dans leurs recherches pour résoudre le problème de compromis. Parmi ces chercheurs on peut citer Fulkerson (1961), Burns et al. (1996), Phillips (1996), Moussourakis et Haksever (2004). D'autres, pas plus nombreux se sont penchés sur la possibilité de réaliser le projet selon différentes façons et admettent la notion de multiplicité des modes.

Elmaghraby (1977) était un des premiers chercheurs à traiter le problème de compromis durée-ressource et de ce fait son incidence sur la diversité des modes possibles pour l'exécution des activités du projet. Ce dernier trouve incommode l'exécution des activités selon une seule façon, et admet le principe selon lequel chaque activité peut être exécutée selon un mode bien particulier plus fiable que d'autres possibles, ce qui fait que le projet même peut se réaliser sous différents modes.

Chaque activité nécessitant une quantité de travail, peut être réalisée selon un mode admissible parmi tous les modes possibles (exemple : un travail de montage ou d'excavation... peut être fait à la main ou à l'aide d'une machine). Comme dans le contexte de mode unique, la recherche de compromis en cas de multiplicité de mode connaît deux méthodes : heuristique et exacte.

Talbot (1982) a développé un algorithme exact et trop général pour résoudre le problème de planification de projet avec limitation des ressources multiples. Cet algorithme peut être utilisé pour résoudre le problème de compromis discret durée-

ressource (DTRTP). En intégrant les ressources renouvelables, non renouvelables et celles doublement limitées et en prenant en considération la variété des types des contraintes sur les différentes ressources, Talbot (1982) essaie de résoudre deux problèmes, il s'agit de minimiser la durée et le coût du projet par la détermination du calendrier des activités qui minimisent la durée totale et du calendrier des activités qui minimisent le coût total du projet. Son modèle reste malgré qu'il est général et simple, un modèle de base pour d'autres auteurs dont notamment Nudtasomboon et Randhawa (1997).

Ces derniers se sont servis donc du modèle de Talbot (1982) comme modèle de base auquel ils ont apporté des améliorations. Nudtasomboon et Randhawa (1997) formulent leur modèle en prévoyant la possibilité de fractionnement des activités dans le sens où une activité peut être interrompue pour un certain temps pour qu'elle soit accomplie par la suite selon le même mode de départ. Le modèle étant à objectifs multiples avec programmation binaire (zéro-un). Les objectifs sont la minimisation de la durée, la minimisation du coût et aussi la minimisation de la variation dans le niveau de ressource dans un contexte de ressources limitées.

Bert et al. 1998, et Demeulemeester et al. (1999) annoncent qu'à chaque mode et à chaque durée leurs sont consacrées des ressources spécifiques. Toutefois, ces auteurs n'évoquent pour autant pas la question de la qualité du travail qui est fortement tributaire de la durée et des ressources allouées (en terme de quantité et de type).

Pour Bert et al. (1999), les modes envisageables sont une combinaison de la durée et des ressources et le mode n'est retenu que si tous les autres modes nécessitent une durée plus longue ou une quantité de ressources plus importante. Leur procédure de recherche est basée dans un premier temps sur une phase d'affectation du mode et dans un deuxième temps sur une phase de planification des ressources au mode fixé. Leur objectif consiste à planifier chaque activité selon le mode le plus efficace.

Néanmoins, le modèle reste limité au seul type de ressource renouvelable et que sa quantité est supposée constante pour chaque période ce qui nous semble plutôt rare. De surcroit, la relation durée-ressource est supposée discrète ce qui rend le champ d'applicabilité de ce modèle encore trop restreint.

Il est généralement admis qu'avec chaque variation au niveau des ressources une variation de la durée est possible, ainsi, chaque combinaison durée-ressource lui est attribué un mode. Or nous pouvons constater deux possibilités de variations des ressources, il s'agit du changement d'une ressource de type (X) par une ressource de type (Y) ou d'une augmentation de la quantité de la ressource initiale (ressource supplémentaire de même type).

Cette dernière possibilité a été retenue par Sprecher (1995) pour qui, chaque combinaison durée-ressource représente un mode indépendant. Le problème initialement connu sous l'appellation RCPSPMCM (Resource Constrained Project Scheduling Problem with Multiple Crashable modes) est de ce fait transformé à RCPSPMM (Resource Constrained Project Scheduling Problem with Multiple modes).

Le problème de RCPSPMCM est une combinaison de deux problèmes de planification abondement étudiés dans la littérature, il s'agit de RCPSP (Resource Constrained Project Scheduling Problem) et TCTP (Time Cost Traid-off Problem), (Ahn et Erenguc, 1998). Ces auteurs admettent la résolution ardue du problème de RCPSP ce qui complique d'avantage la résolution du problème de RCPSPMCM.

La procédure adoptée par Sprencher (1994) nous semble discutable et voir même problématique. En effet, lorsqu'il s'agit notamment d'un grand projet où chaque activité peut être réalisée de différentes façons et susceptible à plusieurs réductions possibles, nous pouvons attendre en ce moment, à un nombre énormément élevé de modes possibles difficiles à quantifier et à gérer.

D'ailleurs, la procédure de résolution du problème RCPSPMM a été critiquée par certains auteurs consolidateurs de la procédure RCPSPMCM. Le modèle heuristique développé n'est toutefois pas adapté à la réalité des projets et considère seulement les ressources renouvelables

En outre, Ahn et Erenguc (1998) et Erenguc et al. (2000) soutiennent que lorsqu'il n'y a pas des limitations de ressources, le problème devient TCTP, par contre lorsqu'il n'y a pas la possibilité de réduction au sein du mode le problème devient RCPSPMM. A ce niveau nous ne manquerons pas de dire qu'il est rare pour ne pas dire impossible d'avoir des ressources sans limitations. Plus loin encore, en cas de disponibilité de ressource sans limitation ni contrainte, le coût demeure son régulateur de consommation.

Tung (2007) a réussi à élaborer une nouvelle technique appelée technique de l'optimisation par essaim de particules (PSO : Particle Swarm Optimization). Par cette technique, différentes fonctions de durée-coût peuvent être résolues et la fonction peut être de type linéaire, non linéaire ou discret. Tung (2007) tient en compte dans son modèle les frais généraux, les coûts de retard et les pénalités.

Par le développement de ce modèle, Tung (2007) confirme encore une fois que le raccourcissement de la durée de projet peut se faire par l'accélération de certaines activités avec une dépense supplémentaire suite à une allocation de nouvelles ressources. Ces dernières peuvent être soit meilleures (en rendement ou en compétence) que les ressources initiales ou peuvent venir simplement s'ajouter à elles (ressources initiales).

Le modèle PSO se montre flexible, robuste et plus ou moins adapté aux projets présentant des activités difficiles sous différentes formes de fonctions. Mais, même s'il semble vérifier l'efficacité, l'efficience et la cohérence, le résultat ne constitue pas forcément un optimum.

Peng et Wang (2009) ont développé un algorithme génétique basé sur le processus génétique des organismes biologiques. Comme dans le problème DTCTP, son modèle baptisé MRC-DTCTP, et fondé sur les ressources renouvelables, ne semble pas apporter une grande valeur ajoutée même s'il est admissible pour des larges réseaux. Le modèle peut être utilisé pour déterminer la date d'achèvement du projet pour un budget spécifié ou minimiser le coût du projet pour une date d'achèvement déterminée. Il s'agit toutefois de fixer une variable et jongler avec l'autre afin de trouver un optimum. Cette technique nous semble reculée même en présence d'un modèle aussi original.

En guise de récapitulation et comme dit précédemment, le compromis durée-ressource est un problème combiné, il regroupe naturellement le problème de compromis durée-coût mais aussi ceux de l'allocation de ressources et de la qualité du livrable qui doit être certes, acceptable.

La diversité des modes offrent une multitude de solutions au problème de compromis durée-coût-qualité, mais il incombe au gestionnaire de projet d'en déterminer la solution optimale. Il n'en demeure pas moins que la recherche de cette solution optimale n'est pas à portée de main lorsqu'une simple variation notamment dans l'allocation des ressources peut affecter complètement la solution optimale. Le programme d'optimisation doit, dès lors renfermer une certaine flexibilité quant à son application.

Il est opportun de dire aussi que les efforts d'optimisation doivent prendre naissance tôt, pendant la phase de planification préparant ainsi un terrain favorable qui augmentera par conséquent les chances d'obtenir des meilleurs résultats. La gestion de projet consiste en la planification de projet, le suivi et le contrôle, et la planification de projet comprend la définition des spécifications de travail, la détermination de la qualité du travail et l'estimation des ressources nécessaires (Babu et Suresh, 1996).

Le mot magique étant «les ressources». La variété des ressources fait qu'on peut exécuter une activité différemment. L'allocation de ressource supplémentaire fait aussi baisser la durée et augmenter le plus souvent le coût et fait déterminer probablement le niveau de la qualité du projet. En un mot, seul un adéquat maniement des ressources permet la réussite de la gestion de projet.

D'emblée, comme le problème d'allocation des ressources en vue d'assurer le compromis entre la durée, le coût et la qualité devient moins restrictif, la complexité de la solution se développe et les techniques d'optimisations classiques sont moins que satisfaisantes à trouver la solution optimale et efficace, il est alors temps de repenser une solution ayant un champ d'applicabilité étendue.

C'est pour cette raison, que nous présentons dans le chapitre III un modèle mathématique prenant en considération les points de faiblesse arborés ci-dessus. Il témoignera notamment le choix de l'aspect multimodal de projet, la variation au niveau des ressources initiales et l'adoption des fonctions pour l'allocation des ressources supplémentaires.

Chapitre III

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

La modélisation mathématique sera faite selon les étapes suivantes. Dans un titre premier, nous exposerons **la position du problème (I)** qui témoignera le choix de l'aspect multimodal de projet, la variation au niveau des ressources initiales et l'adoption des fonctions pour l'allocation des ressources supplémentaires. Dans un titre second, nous exposerons **la fonction d'allocation de ressource et d'optimisation du coût (II)** suivi par l**a fonction d'optimisation de la durée (III)** avant de clôturer le chapitre par **la fonction d'optimisation de la qualité (IV)**.

1/ POSITION DU PROBLÈME

On assiste aujourd'hui à une très importante diversification des entreprises opérant dans le même secteur. Même si le livrable est pareil, elles emploient des outils et des techniques différents. Avec la multiplicité des procédés, des outils, des techniques, des compétences des ressources humaines et du rendement des machines déployées pour la réalisation d'un travail donné, le gestionnaire se trouve souvent confondu.

Il lui incombe donc de bien planifier chaque activité et par conséquent le projet. Nous ne manquerons pas de rappeler le rôle que joue le gestionnaire de projet pendant la phase de la planification mais nous accentuons aussi, à travers ce travail, sur l'intérêt supplémentaire que doit accorder pendant cette phase. Quelle que soit la façon avec laquelle il sera réalisé le projet, le livrable doit rencontrer les spécificités initialement fixées et acceptées par les différentes parties notamment le gestionnaire de projet et le client.

Pour une raison ou une autre, la réalisation du projet ne peut se faire comme il a été convenu même si la planification initiale et l'allocation de ressources sont convenablement élaborées. Des modifications et changements sont souvent présents en cours de route, des retards se produisent ou des nouvelles exigences sont parfois demandées par le client qui est souvent peu ou pas flexible.

Ces changements souvent prévisibles font à ce que le gestionnaire de projet soit prêt à faire face à ce genre de problème et qui consiste en tout état à assurer le compromis entre les trois contraintes, accélérer le projet à moindre coût tout en préservant la qualité.

Le projet est un tout, et le gestionnaire de projet ne peut se permettre d'optimiser une partie et d'ignorer les autres. Le temps étant très précieux aussi bien pour le gestionnaire de projet que pour les autres parties prenantes notamment le client. Ce dernier est de même fortement sensible au coût que peut faire son projet. Satisfaire son client et réaliser le projet rapidement et à moindre coût est une tâche difficile. Cette difficulté s'accentue encore plus, lorsqu'il faut maintenir un niveau de qualité acceptable.

En effet, l'objectif général de ce travail se distingue et consiste à aider le gestionnaire dans le cas de projet multimodales et avec une allocation de ressource optimale, pour résoudre le problème de compromis entre la durée, le coût et la qualité. Notre objectif spécifique est de développer un modèle mathématique permettant de réduire la durée du projet, d'optimiser le coût et d'assurer un niveau de qualité acceptable.

Dans notre développement, nous retiendrons en considération les points faibles des travaux antérieurs et nous tenterons d'apporter un réajustement ou une amélioration permettant ainsi d'augmenter les chances pour rencontrer un optimum lors de résolution du problème de compromis en gestion de projet. C'est pour cette raison que nous adoptons les positions suivantes :

a/ Le problème d'ordonnancement du projet avec ressources limitées dans un contexte de multiplicité de modes (RCPSPMCM)

Nous partageons l'avis de Ahn et Erenguc (1998) ainsi celui de Bert et al. (1998) et considérons l'identification du mode d'exécution admissible pour chaque activité d'une très grande valeur ajoutée. En effet, puisque chaque activité, comme il vient

d'être mentionné, peut être réalisée suivant différentes façons, il y aura ainsi au moins un mode plus efficace que les autres. Un premier objectif sera dès lors de déterminer, pour chaque activité, le mode optimum permettant un achèvement rapide et à moindre coût.

S'il est possible de réaliser une activité en utilisant soit la ressource (X) soit la ressource (Y) alors on a deux modes différents pour la réalisation de cette même activité. Si le coût d'allocation de la ressource (X) diffère de celui de (Y) alors le coût total du projet ne peut guère être le même. Encore, le niveau de performance de la ressource X n'est pas forcément égale à celui de la ressource (Y) ce qui induit inévitablement à une différence au niveau totale de la qualité de l'activité.

En présence de différentes façons (modes) d'achèvement du projet avec une différence dans la durée, le coût et la qualité, le gestionnaire du projet s'offre une chance pour mieux résoudre le problème en optimalisant le compromis durée-coût-qualité. Mais face aux divers modes d'achèvements possibles, il n'est pas toutefois aisé d'identifier le mode optimum pour l'achèvement de chacune des activités.

En conclusion, lorsque les types de ressources déployées ne sont pas les mêmes pour l'exécution du même travail, alors, ni la durée du travail, ni son coût ni non plus sa qualité ne peuvent être les mêmes. Cette variation au niveau de l'allocation de ressource conditionne les autres contraintes de coût, de durée et de qualité telles quelles ont été présentées précédemment par le cercle vertueux.

b/ L'allocation des ressources initiales (quantité, coût)

Pour réaliser une activité, il faut une charge donnée de travail (exprimée en nombre de jours machine par exemple) qui est constante et généralement connue selon les règles du métier ou l'expérience. Lorsque la durée de l'activité baisse, la quantité de ressources doit augmenter pour maintenir la même charge de travail pour achever l'activité. L'allocation de ressource initiale est faite sur la base de la durée du travail.

Si nous retenons le même exemple concernant la charge de travail évoqué en haut (chapitre II, 4/ l'allocation des ressources), nous pouvons ainsi conclure que lors d'une baisse de la durée, les ressources initiales ne seront plus engagées sur la totalité de la durée initiale mais plutôt pendant la durée réduite, ce qui se traduit par une baisse au niveau de la charge du travail. Cette baisse sera compensée par l'allocation des ressources supplémentaires.

Reprenant le cas de l'activité (i,j), dont :

- Ch : La charge totale de travail.
- Ch_i (Ch_s): La charge de travail des ressources initiales (supplémentaires).
- $Dn_{(i,j)}$ ($Dr_{(i,j)}$): La durée normale (réduite) de l'activité (i,j).
- Qi (Qs) : La quantité de ressources initiales (supplémentaires) par unité de temps.
- Pi (Ps) : Le coût d'une ressource initiale (supplémentaire) par unité de temps.
- $Ci_{(i,j)}$ ($Cf_{(i,j)}$) : le coût total initial (final) de l'activité (i,j).
- $C_{f\,(Pi)}$: Le coût total final des ressources initiales seulement.
- CT : Le coût total de l'activité (i,j).
- On suppose par un souci de simplification que le taux d'utilisation des ressources est 100%.

Pour une durée normale (Dn) on a :

$$Ch = Qi * Dn_{(i,j)} = Chi$$

$$Et \quad Ci_{(i,j)} = Qi * Dn_{(i,j)} * Pi$$

Pour une durée réduite (Dr) on a :

$$Ch = Qi * Dr_{(i,j)} + Qs * Dr_{(i,j)}$$

$$Et \quad C_{f\,(Pi)} = Qi * Dr_{(i,j)} * Pi$$

$$Et \quad CT = Qi * Dr_{(i,j)} * Pi + Qs * Dr_{(i,j)} * Ps$$

Puisque $Dr_{(i,j)} \leq Dn_{(i,j)}$ alors on a: $Chi_{(i,j)} \leq Ch_{(i,j)}$

$$C_{f\,(Pi)} \leq Ci_{(i,j)}$$

Ainsi, en accélérant la réalisation de l'activité, la quantité de ressources initiales ne sera plus engagée sur la totalité de la durée normale mais plutôt elle sera engagée seulement sur la durée réduite.

Cette considération n'a pas été, à notre connaissance soulevée par quiconque, du moins dans les articles que nous avons étudié. Nous pouvons ainsi résumer que lorsque la durée d'une activité baisse, la charge de travail des ressources initialement engagées baisse aussi, ce qui à une incidence sur le coût final des ressources initiales. Pour compenser la différence il faut engager des ressources supplémentaires.

c/ Fonctions d'allocation des ressources supplémentaires

Lorsqu'il est question d'accélérer une activité de (y) unités, la quantité (ou le coût) des ressources supplémentaires est toujours considérée en fonction de la réduction (y) et non pas en fonction de la durée réduite (durée normale moins l'accélération). Or les ressources supplémentaires sont engagées tout au long de la durée que va prendre l'activité (durée réduite), il est dès lors plus commode d'envisager ce point.

En plus, nous pensons que, comme pour les ressources, chaque activité a sa propre spécificité quant à sa durée et à la façon adéquate d'allocation de ressource qu'elle va prendre pour sa réalisation. Nous partons du principe selon lequel même si la même ressource est nécessaire pour l'achèvement de deux activités différentes, la façon de son engagement n'est pas forcément la même.

Il en découle que chaque couple ressource-activité possède une fonction propre. Les fonctions peuvent être continues, discrètes, linéaires, convexes, concaves, constantes ou même combinées. En effet, la quantité d'une ressource supplémentaire par unité de temps engagée sur une activité est dépendante exclusivement du couple ressource-activité.

De même, le coût de chaque type de ressource, suit une fonction spécifique et indépendante de la fonction d'allocation de ressource. Ainsi, une fonction d'allocation de ressource par exemple peut être linéaire alors que sa fonction de coût peut être convexe ou concave. Nous illustrons notre propos dans le titre qui suit.

2/ FONCTION D'ALLOCATION DE RESSOURCE ET OPTIMISATION DU COÛT

Sous ce titre, il sera présenté successivement les Fonctions d'allocations des ressources (1), les Fonctions des coûts (2) et l'Élaboration du modèle mathématique (3). Les types des fonctions et les paramètres sont pris au hasard à juste titre de démonstration.

a/ Fonctions d'allocations des ressources

En admettant que chaque couple ressource-activité possède une fonction spécifique, nous ne pouvant pas s'attendre alors à une fonction durée-coût figée. Cette considération nous permet de s'approcher plus de la réalité du projet et du marché tout en retenant les différentes conditions de l'offre et de la demande en matière de ressources indispensables pour la réalisation du projet.

Pour les matières consommables (ressources non renouvelables), il est généralement admis que leur consommation (quantité) augmente proportionnellement avec la durée. La fonction peut être par exemple (souvent) linéaire. Alors que pour d'autre ressource, la quantité allouée en fonction de la durée pourra avoir une allure par exemple concave ou convexe.

Pour illustrer notre propos prenant les fonctions aléatoires suivantes :

- La fonction $P_k(y_{(i,j)})$: une fonction qui désigne la quantité de ressource de type k nécessaire pour l'accélération de l'activité (i,j) de (y) unités.

- La fonction $Csk_{(i,j)}$: Le coût des ressources supplémentaires du type k.
- La fonction S_k : La quantité de ressource de type k qu'on doit engager pendant toute la durée accélérée (Dr).

Le coût des ressources supplémentaires du type k (désigné par $Csk_{(i,j)}$) est égal à la quantité des ressources engagées multipliée par l'accélération (y) multipliée par le coût unitaire de chaque ressource k (désigné par $Psk_{(i,j)}$).

L'équation se présente comme suit :

$$Csk_{(i,j)} = P_k(y_{(i,j)}) * (Dn_{(i,j)} - Dr_{(i,j)}) * Psk_{(i,j)} \quad (1)$$

En retenant S_k comme fonction de la quantité de ressource de type k qu'on doit engager pendant toute la durée accélérée (Dr), on aura alors :

$$Csk_{(i,j)} = S_k(y_{(i,j)}) * Dr_{(i,j)} * Psk_{(i,j)} \quad (2)$$

On peut déduire alors de (1) et (2) que :

$$S_k(y_{(i,j)}) = P_k(y_{(i,j)}) * (y_{(i,j)} / (Dn_{(i,j)} - y_{(i,j)})) \quad (3)$$

Prenant maintenant par exemple trois types de ressources k_1, k_2 et k_3 dont les fonctions $P_k(y_{(i,j)})$ sont du type respectivement convexe, linéaire et concave:

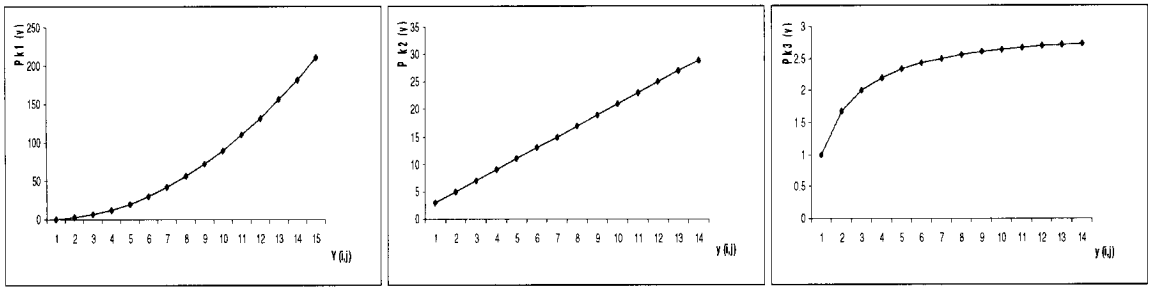
- $y_{(i,j)}$: désigne l'accélération réelle effectuée sur l'activité (i,j)
- $r_{(i,j)}$: La réduction totale possible de la durée d'une activité (i.j), $r_{(i,j)} = Dn_{(i,j)} - Dr_{(i,j)}$,

$P_{k1}(y_{(i,j)}) = \alpha_1 y^2 + \beta_1 y$, avec $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$ et $0 < \alpha_1$, $0 \leq \beta_1$

$P_{k2}(y_{(i,j)}) = \alpha_2 y_{(i,j)} + \beta_2$, avec $0 < \alpha_2$, $\beta_2 \leq 0$ et $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

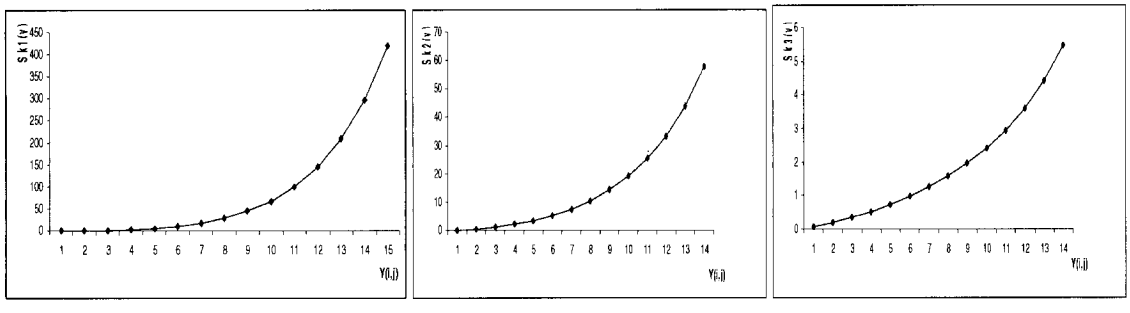
$P_{k3}(y_{(i,j)}) = (\alpha_3 y_{(i,j)} - \beta_3) / (y_{(i,j)} + \lambda_3)$, avec $0 < \alpha_3$, $0 < \beta_3$, $0 < \lambda_3$ et $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

En fixant par exemple les paramètres $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$ $\beta_3 = 1$ et $\lambda_3 = 1$ nous pouvons dresser les différentes quantités de ressources $P_k(y_{(i,j)})$ et $S_k(y_{(i,j)})$ en fonctions de la durée.



5.a *5.b* *5.c*

Figure 5 : Illustrations graphiques des quantités des ressources du type K_1 (5.a), K_2 (5.b) et K_3 (5.c) nécessaires par accélération



6.a *6.b* *6.c*

Figure 6 : Illustrations graphiques des quantités des ressources du type K_1 (6.a), K_2 (6.b) et K_3 (6.c) nécessaires par unité de temps de travail

Les trois premières courbes représentent la variation de la quantité des ressources engagées en fonction de l'accélération.

Même si l'allure des courbes semble être la même dans les graphiques 6.a, 6.b et 6.c la variation n'est pas forcément la même car elle est dépendante de la fonction de l'allocation afférente.

b/ Fonctions des coûts

Comme pour les ressources, le coût peut être une fonction de la quantité consommée (l'exemple de $\mathbf{K_1}$). Dans certains secteurs d'activité, un fournisseur d'équipements peut envisager une offre selon laquelle le prix unitaire (coût) d'un équipement diminue en fonction de la durée (l'exemple de $\mathbf{K_2}$). Nous aurons à ce moment là une fonction d'allocation de ressource du type concave. Pour d'autres équipements, nous pouvant voir le prix unitaire (coût) baisser en fonction de la quantité demandée. Pour les ressources consommables, le coût unitaire est le plus souvent constant (cas de $\mathbf{K_3}$ par exemple).

Supposons que le coût unitaire (Cs) des trois types des ressources (K_1, K_2 et K_3) est comme suit :

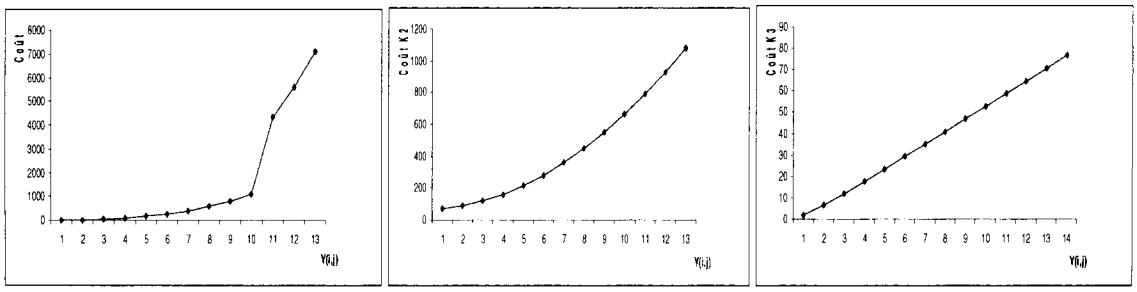
$\mathbf{K_1}$: Cs1 $\left|\begin{array}{l} = 3 \text{ unités monétaires si } \quad Dr_{(i,j)} \leq 10 \\ = 2 \text{ unités monétaires si } \quad 10 < Dr_{(i,j)} \leq 16 \\ = 1 \text{ unités monétaires si } \quad 16 < Dr_{(i,j)} \end{array}\right.$

$\mathbf{K_2}$: Le coût de la ressource K_2 est une fonction par exemple de la quantité nécessaire pour l'accélération. Cs2 (S_k) est exprimé en unités monétaires.

$Cs2\ (S_k) = b * (S_k + 1) / S_k$ avec b désigne le prix de base d'une ressource du type K_2, c'est-à-dire lorsque l'accélération est nulle.

$\mathbf{K_3}$: Nous considérons que le coût unitaire de la ressource K_3 est constant en le fixant à 2 unités monétaires (Cs3 = 2).

En appliquant le coût de chaque type de ressource à sa fonction d'allocation respective, nous aurons les représentations suivantes :



7.a 7.b 7.c

Figure 7 : Illustrations graphiques de la variation du coût pour les ressources K1 (7.a), K2 (7.b) et K3 (7.c)

Lorsque les trois types de ressources sont engagées sur la même activité (i,j), nous aurons une représentation graphique de coût en fonction de l'accélération comme suit :

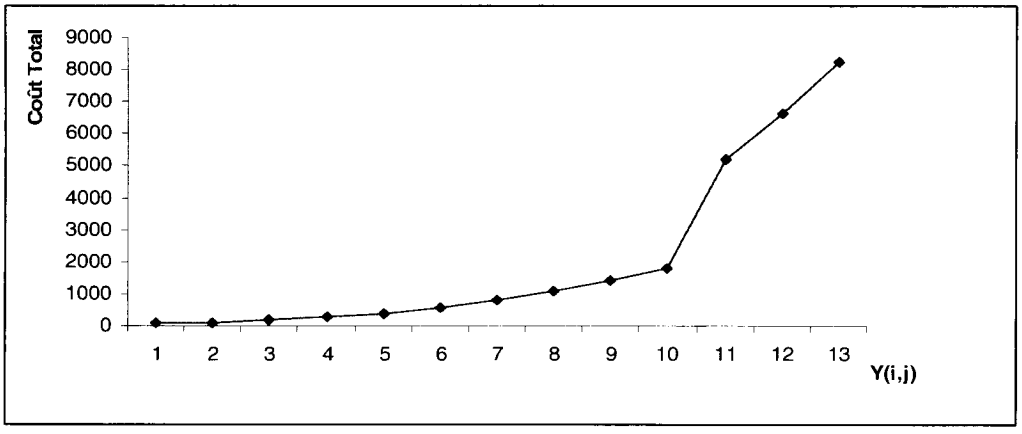


Figure 8 : Illustration graphique du coût total suite à l'utilisation des ressources K_1, K_2 et K_3.

Il est clair que l'allure de la courbe est aléatoire, et le gestionnaire de projet ne peut déterminer ou supposer sa fonction au préalable comme il est d'usage dans les travaux antérieurs. D'emblée, il est temps d'élaborer notre modèle tout en considérant les positions évoquées en haut.

c/ Élaboration du modèle mathématique

Dans le développement qui suit, nous désignons par :

a : L'ensemble des activités sur flèche dans le projet, a ; a :{ 1, 2, …, A},

n : L'ensemble des nœuds dans le réseau du projet, n ; n : {1, 2, …N},

t_n : Le temps de réalisation du nœud n; n : {1, 2, ….., N}.

m : L'ensemble des modes possibles pour la réalisation du projet, m_i: {m_1, m_2, ..., M},

Xm_i : La valeur que peut prendre chacun des modes possibles, Xm_i = 1 si l'activité (i,j) est réalisée selon le mode m_i, et zéro sinon.

K : Les types des ressources disponibles et indispensables pour réaliser le projet, k; k : {1, 2, ….., K}.

Q_k : La quantité de ressource initiale de type k engagée sur l'activité,

$S_k(y_{(i,j)})$: La quantité de ressource supplémentaire de type k_s engagée sur l'activité (i,j),

Li (Ls) : La quantité de ressource initiale (supplémentaire) de type k disponible sur le projet.

Durée :

$Dn_{(i,j)}$ ($Dr_{(i,j)}$) : La durée normale (réduite) de l'activité (i,j),

DI : Durée initiale du projet,

DR : Durée réduite du projet,

$r_{(i,j)}$: La réduction totale possible de la durée d'une activité (i.j), $r_{(i,j)} = Dn_{(i,j)} - Dr_{(i,j)}$,

y_{ij} : L'accélération réelle effectuée sur l'activité (i,j),

Coût :

CI : Coût Initial (normal) total du projet,

$C_{(i,j)}$: Coût normal d'une activité,

$Cr_{(i,j)}$: Coût total d'une activité accélérée,

Ci_k : Le coût d'une unité de ressource initiale du type k par unité de temps,

Cs_k : Coût d'une unité de ressource supplémentaire du type k par unité de temps,

CF : Coût final du projet,

LsCF : Limite supérieure du coût total du projet.

Présentation du modèle mathématique

Le modèle que nous envisageons est fondé sur un certain nombre d'hypothèses, que nous prenons le soin de présenter ci-après :

Hypothèses

H1 : Chaque couple ressource-activité possède une fonction propre.

H2 : Si une activité est entamée dans un mode donné, elle ne peut être interrompue jusqu'à son achèvement. Donc une activité donnée ne peut être achevée que selon un seul mode.

H3 : Quel que soit le mode admissible pour l'achèvement des activités du projet, l'ordre de précédence des activités est le même.

H4 : Le nœud (1) est le seul premier nœud du projet et le nœud (N) est le seul dernier nœud du projet.

H5 : La qualité de toutes les activités a la même importance dans le projet.

Chaque activité peut être exécutée selon l'un des modes (m_i) admissibles. Selon le mode sélectionné, à chaque activité (i,j) lui est attribuée une durée normale (Dn_{ij}) et une durée accélérée maximale possible (Dr_{ij}) indispensable pour sa réalisation. En effet, la durée normale de réalisation d'une activité selon un mode déterminé peut être différente de sa durée lors de sa réalisation selon un autre mode. Aussi, la durée accélérée d'une activité selon un mode déterminé peut être différente de sa durée accélérée selon un autre mode. Le réseau final du projet est une combinaison de tous les modes admissibles.

Les durées Dn et Dr sont supposées connues. La réalisation de chaque activité prend un ou plusieurs types de ressources (k) disponibles en quantités limitées (Li, Ls).

Chaque ressource supplémentaire (k_s) possède un coût unitaire Csk qui suit une fonction donnée dépendante de la quantité ou de la durée. De même la façon d'allocation de la ressource k est une fonction $S_k(y_{(i,j)})$ qui dépend essentiellement de l'accélération (durée).

Le coût d'une ressource supplémentaire (par unité de temps réduite) peut être supérieur à celui d'une ressource initialement prévue. Cette différence peut s'expliquer par le fait qu'une ressource supplémentaire est mieux payée que la ressource initialement déployée en raison qu'elle est plus compétente. Le coût supérieur peut aussi s'expliquer par l'augmentation dans le taux horaire d'une ressource initiale lorsque le travail est réalisé en heures supplémentaires.

Un coût supérieur peut enfin s'expliquer par l'indisponibilité d'une ressource supplémentaire non employée sur le projet et l'allocation d'une ressource de l'extérieur coûtera plus chère qu'une ressource initialement engagée sur le projet. Mais il est toutefois possible d'employer une ressource supplémentaire à un coût égal ou inférieur à celui d'une ressource initialement employée.

Le tableau qui suit présente les caractéristiques que peut prendre une activité dans un projet.

	Mode m_i									
	Ress initiales Qi						**Ress. Supp. Qs**			
	Dn	**Dr**	**r**	**k_1**	**k_2**	**...** **K**	**k_{s1}**	**k_{2s}**	**...**	**K**
(i,j)	$Dn_{(i,j)}$	$Dr_{(i,j)}$	$r_{(i,j)}$	$Qi_{k1(i,j)}$	$Qi_{k2(i,j)}$	... $Qi_{k3(i,j)}$	$S_{k1}(y_{(i,j)})$	$S_{k2}(y_{(i,j)})$	...	$S_K(y_{(i,j)})$
Coût				Cik_1	Cik_2	... CiK	Csk_1	Csk_2	...	CsK

Tableau No. 1 : Caractéristiques d'une activité.

Le coût d'une activité peut se dessiner ainsi :

$$Cr_{(i,j)} = \sum_{k=1} Dr_{(i,j)} * [(Qik * Cik) + (Sk(y_{(i,j)}) * Csk)]$$

Et le coût total du projet peut s'écrire comme suit :

$$CF = \sum_{(i,j)} \sum_{k=1} Dr_{(i,j)} * [(Qik_{(i,j)} * Cik) + (Sk(y_{(i,j)}) * Csk)]$$

Dans un contexte de multiplicités des modes, l'équation d'optimisation du coût aura la forme suivante :

$$Min\ CF = \sum_{mi} \sum_{(i,j)} \sum_{k=1} Dr_{(i,j)} * [(Qik_{(i,j)} (m_i) * Cik) + (Sk(y_{(i,j)}) (m_i) * Csk)] * Xm_i$$

Sujet à :

(1) $t_j - t_i + y_{ij} \geq Dn_{ij}\ ;\ \forall\ (i,j) \in A$

(2) $\forall\ (i,j) \in N,\ 1 \leq (i) < (j)$

(3) $1 \leq m_i \leq M$

(4) $LsCF \geq CF$

(5) $X_{mi}\ (i,j) \in \{0\ ,\ 1\}$

(6) $\sum X_{mi}\ (i,j) = 1$

(7) $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

- La contrainte (1) permet d'assurer que l'ordre de précédence des activités soit satisfait. Pour toute activité appartenant à l'ensemble des activités {A} il faut que le temps de réalisation du nœud (j) diminué du temps de réalisation du nœud (i) auquel on ajoute la réduction réellement faite sur cette même activité devrait être au moins égale à sa durée normale.
- La contrainte (2) désigne que les nœuds (i) et (j) appartiennent à l'ensemble des nœuds du projet (N) et que (j) est un nœud de tête alors que (i) est le nœud de queue.
- La contrainte (3) désigne que le mode applicable pour une activité donnée ne peut être différent des modes possibles (M).
- La contrainte (4) fixe la limite supérieure possible des dépenses que peut atteindre le projet après son accélération.

- La contrainte (5) assure que l'activité soit réalisée soit selon le mode m_i soit non et la contrainte (6) assure la réalisation de chaque activité seulement selon un seul mode.
- La contrainte (7) assure que la réduction réelle soit bornée par zéro et une limite possible. La réduction réelle ne peut être négative et ne peut non plus être supérieure à une réduction maximale possible sur l'activité.

2/ FONCTION D'OPTIMISATION DE LA DURÉE

Lorsque la date d'achèvement d'une activité selon le mode (m_1) diffère de sa date d'achèvement selon le mode (m_2), le gestionnaire cherche généralement à ce qu'elle soit réalisée rapidement et choisie par conséquent le mode permettant de la réaliser le plus tôt. Mais cette tâche ne semble pas aisée lorsqu'il s'agit d'un ensemble d'activités inter-reliées les unes aux autres dans un ordre de précédence bien défini.

Plusieurs chemins forment généralement le réseau du projet dont au moins un chemin critique. Le choix du mode permettant l'achèvement le plus précoce d'une activité critique peut être incompatible avec un autre chemin, notamment non critique.

Dans le développement qui suit, nous désignons par :

- Chc_i (Chn_i): L'ensemble des chemins critiques (non critiques), c_i (n_i): (c_1, c_2, ... n_1, n_2. ...).
- Chi : L'ensemble des chemins dans le projet, $Chi = Chc_i + Chn_i$,
  Ch_i :{Chc_1, Chc_2, ..., Chn_1, Chn_2,... }.
- t_n^{Chci}: Le temps de réalisation du nœud n, dans le chemin (Chc_i), n : (1, 2, ..., N).
- t_n^{Chni}: Le temps de réalisation du nœud n dans le chemin (Chn_i), n : (1, 2, ..., N).

Formulation du modèle

A côté de l'hypothèse H4, il est supposé que la date de commencement du projet c'est-à-dire la date de réalisation du premier nœud (t_1) est égale à zéro. Il est toutefois possible que la date de réalisation du nœud (t_1) soit supérieure à zéro lorsqu'il s'agit notamment d'un projet (ou sous projet) différent prenant début après la fin d'un autre projet.

La fonction d'optimisation de la durée nous permet de chercher la date la plus proche pour l'achèvement du projet. La fonction-objectif vise à réduire au minimum la durée accélérée du projet DR qui représente la date de réalisation du dernier nœud N (t_N).

Ainsi, la Fonction-objectif de la durée : *Min* DR = t_N ;

La fonction-objectif peut être représentée par les fonctions décrites ci-après. La première fonction s'interprète ainsi : La date de réalisation du nœud (j) dans le chemin critique (Chc_i) est égale à la date de réalisation du nœud qui le précède (i) sur le même chemin critique plus la durée accélérée la plus faible de tous les modes admissibles de l'activité (i,j).

$$t_j^{Chci} = t_i^{Cci} + Min\ [Dn_{ij} - y_{ij}]\ (Xm_i)$$

.....

$$t_j^{Chni} = t_i^{Cni} + Min\ [Dn_{ij} - y_{ij}]\ (Xm_i)$$

.....

Sujet au :

(1) $t_j - t_i + y_{ij} \geq Dn_{ij}$;

(2) $\forall\ (i,j) \in N,\ 1 \leq (i) < (j)$,

(3) $1 \leq m_i \leq M$

(5) $X_{mi}\ (i,j) \in \{0\ ,\ 1\}$

(6) $\sum X_{mi}\ (i,j) = 1$

(7) $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

(8) $t_1^{Chci} = 0$

(9) $t_1^{Chni} = 0$

(10) Chc_i entier, $Chc_i > 0$

(11) Chn_i entier, $Chn_i \geq 0$

(12) $t_N^{Chc1} = t_N^{Chc2} = \ldots = t_N^{Chci}$

(13) $t_N^{Chci} \geq t_N^{Chni}$

- La contrainte (1) permet d'assurer que l'ordre de précédence des activités soit satisfait. Pour toute activité appartenant à l'ensemble des activités {A} il faut que le temps de réalisation du nœud (j) diminué du temps de réalisation du nœud (i) auquel on ajoute la réduction réellement faite sur cette même activité devrait être au moins égale à sa durée normale.
- La contrainte (2) désigne que les nœuds (i) et (j) appartiennent à l'ensemble des nœuds du projet (N) et que (j) est un nœud de tête alors que (i) est le nœud de queue.
- La contrainte (3) désigne que le mode applicable pour une activité donnée ne peut être différent des modes possibles (M).
- La contrainte (5) assure que l'activité soit réalisée soit selon le mode m_i soit non et la contrainte (6) assure la réalisation de chaque activité seulement selon un seul mode.
- La contrainte (7) assure que la réduction réelle soit bornée par zéro et une limite possible. La réduction réelle ne peut être négative et ne peut non plus être supérieure à une réduction maximale possible sur l'activité.
- Les contraintes (8) et (9) indiquent que la date de réalisation du premier nœud dans tous les chemins critiques et non critiques est égale à zéro.
- La contrainte (10) indique que l'ensemble des chemins critiques est un nombre entier et qu'il existe au moins un chemin critique dans le projet.
- La contrainte (11) indique que l'ensemble des chemins non critiques est un nombre entier. Le projet peut ne pas avoir un chemin non critique.
- La contrainte (12) indique que la date de réalisation du dernier nœud (N) est la même quel que soit le chemin critique.

- La contrainte (13) indique que la date de réalisation du dernier nœud N dans un chemin non critique ne peut être supérieure que sa réalisation dans un chemin critique.

4/ FONCTION D'OPTIMISATION DE LA QUALITÉ

Dans un objectif d'accélérer le projet en présence d'une diversité de ressources il est dangereux de ne pas tenir compte de la qualité des activités, notamment celles accélérées ainsi que la qualité du projet en sa totalité. Il est préjudiciable d'ignorer la variation de la qualité alors que son niveau constitue l'une des spécificités techniques du livrable.

Notre apport au niveau de la qualité est inspiré du travail effectué par Babu et Suresh (1996), qui constitue l'un des rares travaux s'intéressant à la qualité en sus de la durée et le coût. Par un souci de simplification et à l'instar de Babu et Suresh (1996), nous adoptons une fonction durée-qualité linéaire et la qualité finale du projet est calculée sur la base de la moyenne arithmétique.

En effet, pour chaque activité, il lui est associé un niveau de qualité normal ($Pn_{(i,j)}$), généralement fixé à cent pour cent ($Pn_{(ij)} = 100\%$) et un niveau de qualité accéléré ($Pf_{(ij)}$) correspondant à l'activité accélérée. Il est toutefois déterminé un niveau de qualité minimum (seuil de la qualité désigné par $Ps_{(i,j)}$) pour chaque activité. Au-delà de ce seuil, l'activité ne peut plus être accélérée.

Puisqu'il est considéré que la qualité est une fonction linéaire croissante de la durée, on peut alors définir la pente de baisse de la qualité que l'on désigne par PQ_{ij}. Ainsi, chaque fois que la durée baisse, la qualité proportionnellement baisse aussi. Quelle que soit la durée de réduction permise sur une activité, le niveau de sa qualité ne doit pas toutefois baisser au-delà du seuil de la qualité fixé.

Ainsi, nous pouvons accélérer une activité (i,j) d'une durée maximale ($r_{(i,j)}$) tout en maintenant un niveau de qualité acceptable tel que $Pf_{ij} \geq Ps_{ij}$.

Dans le développement qui suit nous désignons par :

- PI (PF): niveau de qualité normal (final) du projet, avec PI = 1
- Pn_{ij} (Pf_{ij}) : niveau normal (final) de la qualité d'une activité, avec $Pn_{(i,j)} = 1/A$
- PQ_{ij} : pente de la qualité : Diminution du niveau de la qualité suite à une réduction d'une unité de temps de la durée de l'activité (i,j). La PQ prend la valeur zéro s'il n'y aucune accélération possible sur l'activité, avec PQ = (Pn – Pf) / (Dn – Dr).
- Ps_{ij} : Seuil minimal acceptable du niveau de qualité de l'activité (i,j).

Le niveau de la qualité normal étant égal à l'unité (100%), $PI = (1/A) \sum_{ij} Pn_{ij} = 1$

Le niveau de la qualité final (PF) est égal à la somme de tous les niveaux de la qualité de toutes les activités divisée par le nombre des activités (A) dans le projet.

Le niveau final de qualité d'une activité (i,j) s'écrit comme suit :

$$Pf_{(i,j)} = 1 - (PQ_{(i,j)} * y_{(i,j)})$$

Le niveau final de la qualité pour tout le projet se présente comme suit:

$$PF = (1/A) \sum_{ij} Pf_{(i,j)}$$
$$= (1/A) \sum_{ij} (1 - PQ_{(i,j)} * y_{(i,j)})$$

Dans un contexte de multiplicité de modes, la fonction d'optimisation de la qualité se dessine ainsi :

$$PF = Max\ (1/A) \sum_{mi} \sum_{ij} (1 - PQ_{(i,j)} * y_{(i,j)}) * X_{(i,j)m_i}$$

Sujet à:

(1) $t_j - t_i + y_{ij} \geq Dn_{ij}$;

(2) $\forall\ (i,j) \in N,\ 1 \leq (i) < (j)$,

(3) $\forall\ m_i \in M$

(5) $X_{(i,j)}\, m_i\, (i,j) \in \{0\ ,\ 1\}$

(6) $\sum_{mi} X(i,j) = 1$

(7) $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

(14) $Ps_{(i,j)} \leq Pf_{(i,j)}$

- La contrainte (1) permet d'assurer que l'ordre de précédence des activités soit satisfait. Pour toute activité appartenant à l'ensemble des activités {A} il faut que le temps de réalisation du nœud (j) diminué du temps de réalisation du nœud (i) auquel on ajoute la réduction réellement faite sur cette même activité soit au moins égale à sa durée normale.
- La contrainte (2) désigne que les nœuds (i) et (j) appartiennent à l'ensemble des nœuds du projet (N) et que (j) est un nœud de tête alors que (i) est le nœud de queue.
- La contrainte (3) désigne que le mode applicable pour une activité donnée ne peut être différent des modes possibles (M).
- La contrainte (5) assure que l'activité soit réalisée soit selon le mode m_i soit non et la contrainte (6) assure la réalisation de chaque activité seulement selon un seul mode.
- La contrainte (7) assure que la réduction réelle soit bornée par zéro et une limite possible. La réduction réelle ne peut être négative et ne peut non plus être supérieure à une réduction maximale possible sur l'activité.
- La contrainte (14) assure que le niveau final de la qualité de l'activité (i,j) soit au moins égal à son seuil de qualité minimum ($Ps_{(i,j)}$).

On a pu montrer dans ce chapitre que chaque couple ressource-activité et chaque couple ressource-coût peut avoir sa propre fonction. La nature de la ressource, la nature du travail, la quantité des ressources nécessaires sont autant d'éléments importants pour la détermination de l'allure de la fonction.

Dans le chapitre IV nous illustrons notre modèle par un exemple.

Chapitre IV

ILLUSTRATION

Trois fonctions-objectifs forment notre modèle, il s'agit de trois fonctions conflictuelles :

- *Min* $CF = \sum_{mi} \sum_{(i,j)} \sum_{k=1} Dr_{(i,j)} * [(Qik_{(i,j)} (m_i) * Cik) + (Sk(y_{(i,j)}) (m_i) * Csk)] * Xm_i$
- *Min* $DR = t_n$
- *Max PF* = $(1/A) \sum_{mi} \sum_{ij} (1 - PQ_{(i,j)} * y_{(i,j)}) * X_{(i,j)}m_i$

Nous allons illustrer ce modèle par un exemple. Les données qui suivent présentent un projet pris au hasard à sept (07) activités et six (06) nœuds. Le réseau du projet avec des activités sur flèche est présenté comme suit :

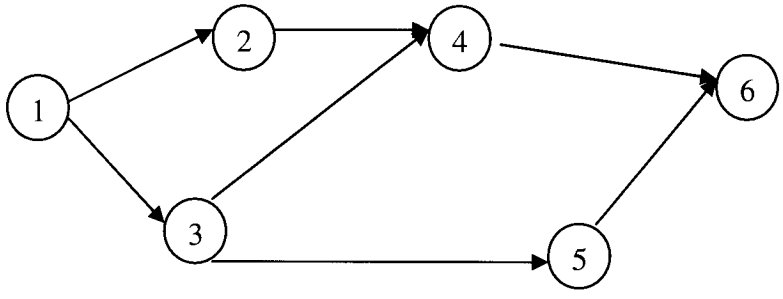


Figure 9 : Réseau du projet

Nous supposons dans cette illustration que :

- Chaque activité peut être exécutée selon deux modes dont la durée, le coût et/ou la qualité peuvent être différents.
- Trois types de ressources sont indispensables pour chacun des modes (k_1, k_2 et k_3 pour le mode 1 et k'_1, k'_2 et k'_3 pour le mode 2).
- Le chemin critique est le même dans les deux modes d'exécution du projet.

Le tableau No. 2 présente les données relatives au projet selon le mode 1 et 2 (durées des activités et ressources nécessaires), avec :

- Dn (Dr): durée normale (réduite),
- $R_{(i,j)}$: Accélération maximale,
- Ci : Type de ressource.

	Mode 1						Mode 2					
$A_{(i,j)}$	$Dn_{(i,j)}$	$Dr_{(i,j)}$	$r_{(i,j)}$	Cik_1	Cik_2	Cik_3	$Dn_{(i,j)}$	$Dr_{(i,j)}$	$r_{(i,j)}$	Cik'_1	Cik'_2	Cik'_3
1,2	7	3	4	2	1	0	6	2	4	0	2	2
1,3	5	2	3	1	0	3	4	2	2	0	2	3
2,4	4	1	3	0	2	3	6	3	3	2	0	2
3,4	5	2	3	0	3	1	7	3	4	4	1	0
3,5	4	1	3	2	0	3	2	1	1	2	0	1
4,6	6	2	4	3	2	0	5	1	4	0	3	2
5,6	5	2	3	1	0	3	7	4	3	2	2	0

Tableau No. 2 : Données relatives au projet selon le mode 1 et 2 (durées des activités et ressources nécessaires)

D'après le réseau du projet et le tableau de ses caractéristiques on peut identifier ce qui suit :

- Un chemin critique : Chc_1 (1246).
- Deux chemins non critiques : Chn_1 (1346) et Chn_2 (1356).
- La durée Initiale (normale) du projet DI est 17 unités de temps que ce soit pour le mode 1 que le mode 2.
- Le coût Initiale du projet CI est 462 unités monétaires (um.) pour le mode 1 et 426 um. pour le mode 2.

1/ Résolution du problème d'optimisation du coût

$$\textit{Min}\ CF = \sum_{mi} \sum_{(i,j)} \sum_{k=1} Dr_{(i,j)} * [\ (Qik_{(i,j)}\ (m_i) * Cik) + (Sk(y_{(i,j)})\ (m_i) * Csk)\ ] * Xm_i$$

Cette fonction-objectif permet de chercher pour chaque activité le mode ayant le moindre coût correspondant à une accélération de y_{ij} unités. Autrement dit, ce programme permet de sélectionner, pour une accélération donnée (y_{ij}), le mode offrant le coût d'accélération le moins onéreux. Ce qui ce répercute favorablement par la minimisation du coût final (CF) de tout le projet.

Min CF

Sujet à :

(1)
$$t_{2(m1)} - t_{1(m1)} + y_{12(m1)} \geq 7$$
$$t_{3(m1)} - t_{1(m1)} + y_{13(m1)} \geq 5$$
$$t_{4(m1)} - t_{2(m1)} + y_{24(m1)} \geq 4$$
$$t_{4(m1)} - t_{3\ (m1)} + y_{34(m1)} \geq 5$$
$$t_{5(m1)} - t_{3(m1)} + y_{35(m1)} \geq 4$$
$$t_{6(m1)} - t_{4(m1)} + y_{46(m1)} \geq 6$$
$$t_{6(m1)} - t_{5(m1)} + y_{56(m1)} \geq 5$$

$$t_{2(m2)} - t_{1(m2)} + y_{12(m2)} \geq 6$$
$$t_{3(m2)} - t_{1(m2)} + y_{13(m2)} \geq 4$$
$$t_{4(m2)} - t_{2(m2)} + y_{24(m2)} \geq 6$$
$$t_{4(m2)} - t_{3\ (m2)} + y_{34(m2)} \geq 7$$
$$t_{5(m2)} - t_{3(m2)} + y_{35(m2)} \geq 2$$
$$t_{6(m2)} - t_{4(m2)} + y_{46(m2)} \geq 5$$
$$t_{6(m2)} - t_{5(m2)} + y_{56(m2)} \geq 7$$

(2) $(1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,6)$ et $(5,6) \in \{A\}$

(3)
$$1 \leq m_1 \leq 2$$
$$1 \leq m_1 \leq 2$$

(4) $LsCF \geq CF$

(5)
$$X_{m1}(1,2) \in \{0, 1\}$$
$$X_{m1}(1,3) \in \{0, 1\}$$
$$X_{m1}(2,4) \in \{0, 1\}$$
$$X_{m1}(3,4) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m1}(3,5) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m1}(4,6) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m1}(5,6) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(1,2) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(1,3) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(2,4) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(3,4) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(3,5) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(4,6) \in \{0, 1\}$$

$$X_{m2}(5,6) \in \{0, 1\}$$

(6)
$$X_{m1}(1,2) + X_{m2}(1,2) = 1$$

$$X_{m1}(1,3) + X_{m2}(1,3) = 1$$

$$X_{m1}(2,4) + X_{m2}(2,4) = 1$$

$$X_{m1}(3,4) + X_{m2}(3,4) = 1$$

$$X_{m1}(3,5) + X_{m2}(3,5) = 1$$

$$X_{m1}(4,6) + X_{m2}(4,6) = 1$$

$$X_{m1}(5,6) + X_{m2}(5,6) = 1$$

(7)
$$0 \leq y_{(1,2)}(m_1) \leq 4$$

$$0 \leq y_{(2,3)}(m_1) \leq 3$$

$$0 \leq y_{(2,4)}(m_1) \leq 3$$

$$0 \leq y_{(3,4)}(m_1) \leq 3$$

$$0 \leq y_{(3,5)}(m_1) \leq 3$$

$$0 \leq y_{(4,6)}(m_1) \leq 4$$

$$0 \leq y_{(5,6)}(m_1) \leq 3$$

$$0 \leq y_{(1,2)}(m_2) \leq 4$$
$$0 \leq y_{(2,3)}(m_2) \leq 2$$
$$0 \leq y_{(2,4)}(m_2) \leq 3$$
$$0 \leq y_{(3,4)}(m_2) \leq 4$$
$$0 \leq y_{(3,5)}(m_2) \leq 1$$
$$0 \leq y_{(4,6)}(m_2) \leq 4$$
$$0 \leq y_{(5,6)}(m_2) \leq 3$$

Dans notre modèle, nous avons montré que le coût des ressources initiales baisse lorsque la durée de l'activité diminue. Nous pouvons ainsi calculer le coût des ressources relatif à chaque activité en fonction de l'accélération. Le résultat est présenté dans le tableau No. 3 ci-après.

	Mode 1					**Mode 2**				
$A_{(i,j)}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1,2	56	48	40	32	24	84	70	56	42	28
1,3	52,5	42	31,5	21		68	51	34		
2,4	76	57	38	19		48	40	32	24	
3,4	90	72	54	36		56	48	40	32	24
3,5	48	36	24	12		10	5			
4,6	87	72,5	58	43,5	29	90	72	54	36	18
5,6	52,5	42	31,5	21		70	60	50	40	

Tableau No. 3: Variation du coût des ressources initiales en fonction de l'accélération.

Si nous prenons les trois types de fonctions d'allocation de ressources supplémentaires (k_1, k_2 et k_3) évoqués à titre d'exemple dans la chapitre III qui sont du type convexe, linéaire et concave et accordons pour chaque activité et pour chaque mode les paramètres spécifiques comme c'est montré dans le tableau No. 4 (dans notre cas ces paramètres sont fixés aléatoirement), nous pouvons alors avoir la variation de la quantité de chaque ressource selon l'accélération nécessaire pour chaque activité et pour chaque mode comme c'est montré dans le tableau No. 5: Quantité de ressource nécessaire.

$P_{k1}(y_{(i,j)}) = \alpha_1 y^2 + \beta_1 y$, avec $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$ et $0 < \alpha_1$, $0 \leq \beta_1$

$P_{k2}(y_{(i,j)}) = \alpha_2 y_{(i,j)} + \beta_2$, avec $0 < \alpha_2$, $\beta_2 \leq 0$ et $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

$P_{k3}(y_{(i,j)}) = (\alpha_3 y_{(i,j)} - \beta_3) / (y_{(i,j)} + \lambda_3)$, avec $0 < \alpha_3$, $0 < \beta_3$, $0 < \lambda_3$ et $0 \leq y_{(i,j)} \leq r_{(i,j)}$

	Mode 1									**Mode 2**								
(i,j)	**Ks_1**			**Ks_2**			**Ks_3**			**Ks'_1**			**Ks'_2**			**Ks'_3**		
	α_1	β_1	λ_1	α_2	β_2	λ_2	α_3	β_3	λ_3	α_1	β_1	λ_1	α_2	β_2	λ_2	α_3	β_3	λ_3
1,2	1	1	0	2	1	0	2	1	1	1	2	0	1	1	0	2	1	1
1,3	2	1	0	1	1	0	2	1	1	2	1	0	0,5	1	0	2	1	1
2,4	2	1	0	0,5	2	0	3	1	1	1	1	0	1	1	0	2	1	1
3,4	1	1	0	1	1	0	2	1	2	2	1	0	1	2	0	3	1	1
3,5	2	1	0	1	1	0	2	1	1	2	2	0	2	1	0	3	2	1
4,6	1	1	0	2	1	0	2	1	1	1	0,5	0	1	1	0	1,5	1	1
5,6	1	1	0	1	2	0	2	1	1	2	1	0	1	2	0	2	1	1

Tableau No 4 : Paramètres relatifs aux fonctions d'allocations des ressources

Nous pouvons interpréter la première ligne (activité (1,2)) et les trois premières colonnes (mode 1) comme suit :

- La quantité de ressource supplémentaire du type K_1 nécessaire pour l'activité (1,2) est une fonction de l'accélération $P_{k1}(y_{(i,j)})$, avec $P_{k1}(y_{(1,2)}) = 1\ y^2 + 1\ y$.
- La quantité de ressource supplémentaire du type K_2 nécessaire pour l'activité (1,2) est une fonction de l'accélération $P_{k2}(y_{(i,j)})$, avec $P_{k2}(y_{(1,2)}) = 2\ y_{(i,j)} + 1$.
- La quantité de ressource supplémentaire du type K_3 nécessaire pour l'activité (1,2) est une fonction de l'accélération $P_{k3}(y_{(i,j)})$, avec $P_{k3}(y_{(1,2)}) = (2\ y_{(i,j)} - 1) / (y_{(i,j)} + 1)$.

$A_{(i,j)}$	K	$y_{(i,j)}=1$	$y_{(i,j)}=2$	$y_{(i,j)}=3$	$y_{(i,j)}=4$	$y_{(i,j)}=1$	$y_{(i,j)}=2$	$y_{(i,j)}=3$	$y_{(i,j)}=4$
	k1	0,33	2,40	9,00	26,67	0,60	4,00	15,00	48,00
	k2	0,50	2,00	5,25	12,00	0,40	1,50	4,00	10,00
1,2	k3	0,08	0,40	0,94	1,87	0,10	0,50	1,25	2,80
	k1	0,75	6,00	28,50		1,00	10,00		
	k2	0,50	2,00	6,00		0,50	2,00		
1,3	k3	0,13	0,67	1,88		0,17	1,00		
	k1	1,00	10,00	63,00		0,40	3,00	12,00	
	k2	0,83	3,00	10,50		0,40	1,50	4,00	
2,4	k3	0,33	1,67	6,00		0,10	0,50	1,25	
	k1	0,50	4,00	18,00		0,17	1,60	6,75	21,33
	k2	0,50	2,00	6,00		0,50	1,60	3,75	8,00
3,4	k3	0,08	0,50	1,50		0,17	0,67	1,50	2,93
	K1	1,00	10,00	63,00		4,00			
	k2	0,67	3,00	12,00		3,00			
3,5	k3	0,17	1,00	3,75		0,50			
	k1	0,40	3,00	12,00	40,00	0,38	3,33	15,75	72,00
	k2	0,60	2,50	7,00	18,00	0,50	2,00	6,00	20,00
4,6	k3	0,10	0,50	1,25	2,80	0,06	0,44	1,31	4,00
	k1	0,50	4,00	18,00		0,50	4,00	15,75	
	k2	0,75	2,67	7,50		0,50	1,60	3,75	
5,6	k3	0,13	0,67	1,88		0,08	0,40	0,94	

Tableau No. 5 : Quantité des ressources supplémentaires indispensables par unité de temps de travail.

A titre d'interprétation, le besoin en ressource du type Ks1 pour l'activité (1,2) dans le mode 1 est 0.33 unités pendant 6 unités de temps de travail (Durée normale moins accélération : 7 – 1), par contre le besoin serait de 2.4 unités pendant 5 unités de temps de travail (7 – 2), encore le besoin serait 9 unités si la durée de la tâche passe à 4 unités de temps et en fin le besoin serait 26.67 unités pendant chaque unité de temps de travail c'est-à-dire 3.

Ce tableau donne au gestionnaire de projet une vision détaillée sur le besoin en ressources pour chaque durée (Dr). Ainsi, lorsqu'il envisage accélérer une activité de (y) unités il serait capable de déterminer avec précision la quantité nécessaire à engager pendant toute la durée de travail (c'est-à-dire la durée réduite).

Comme pour la quantité des ressources, nous pouvons adopter les mêmes fonctions de coût signalées dans le paragraphe III 2/ 2/ (Fonctions des coûts). Les types de fonctions et les coûts établis sont choisis au hasard. Le tableau No. 6 représente le coût unitaire des ressources initialement engagées sur le projet. D'après ce tableau on peut calculer le coût initial (CI) du projet qui s'élève à 462 et 426 unités monétaires selon le mode 1 et le mode 2 respectivement.

		Mode 1			**Mode 2**		
		Cik_1	**Cik_2**	**Cik_3**	**Cik'_1**	**Cik'_2**	**Cik'_3**
Coût unitaire	**Ci**	1.5	5	3	1	4	3

Tableau No. 6 : Coûts unitaires des ressources initiales par unité de temps

Supposons que le coût unitaire (Cs) des trois types de ressource (Ks_1, Ks_2 et Ks_3) est comme suit :

Mode 1

Ks_{1m1} : Cs1 = 3 unités monétaires si $Dr_{(i,j)} \leq 3$
= 2 unités monétaires si $3 < Dr_{(i,j)} \leq 5$
= 1 unités monétaires si $5 < Dr_{(i,j)}$

Mode 2

Ks_{1m2} : Cs1 = 4 unités monétaires si $Dr_{(i,j)} \leq 2$
= 2 unités monétaires si $2 < Dr_{(i,j)} \leq 4$
= 1 unités monétaires si $4 < Dr_{(i,j)}$

Ks_2: Le coût de la ressource Ks_2 est en fonction par exemple de la quantité nécessaire pour l'accélération. Cs2 (S_k) est en unités monétaires.

$Cs2\ (S_k) = b * (S_k + 1) / S_k$ avec b désigne le prix de base d'une ressource du type K_2.

Pour le mode 1 :

$Cs2_{m1}\ (S_k) = 2 * (S_k + 1) / S_k$; avec $S_k > 0$

Pour le mode 2 :

$Cs2_{m2}(S_k) = 3 * (S_k + 1) / S_k$; avec $S_k > 0$

Ks_3 : Nous considérons par exemple que le coût unitaire est constant en le fixant à 3 unités monétaires pour le mode 1 ($Cs3_{m1} = 3$) et à 5 unités monétaires pour le mode 2 ($Cs3_{m2} = 5$).

Dans l'annexe sont dressés les tableaux représentant le coût unitaire de la ressource supplémentaire du type Ks1 (annexe 1) et du type Ks2 (annexe 2) correspondant à chaque activité et à chaque durée. Alors que l'annexe 3 présente le coût total de chaque ressource selon l'accélération.

D'après ces données, nous pouvons dresser le tableau des coûts totaux attendus pour chaque accélération.

	Mode 1				Mode 2			
$A_{(i,j)}$	1	2	3	4	1	2	3	4
1,2	3,58	12,00	33,31	111,60	5,30	18,00	51,25	239
1,3	4,88	26,00	105,13		7,33	54,00		
2,4	7,67	43,00	230,00		5,10	16,00	45,25	
3,4	4,25	19,50	72,50		5,50	12,73	35,25	84,33
3,5	6,83	41,00	226,25		30,50			
4,6	4,30	14,50	55,75	166,40	5,56	17,89	90,56	371,00
5,6	4,88	21,33	76,63		5,42	13,80	50,44	

Tableau No. 7 : Incrément de coût des activités selon l'accélération

Ainsi, notre fonction-objectif *Min* CF consiste à sélectionner le mode ayant le coût le moins élevé. Dans notre cas, les coûts totaux de toutes les ressources selon la réduction possible pour chaque activité sont inscrits dans le tableau suivant.

	Mode 1					Mode 2				
$A_{(i,j)}$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1,2	56	51,58	52	65,31	135,6	84	75,3	74	93,25	267
1,3	52,5	46,88	57,5	126,12		68	58,33	88		
2,4	76	64,67	81	249		48	45,10	48,00	69,25	
3,4	90	76,25	73,5	108,5		56	53,5	52,73	67,25	108,33
3,5	48	42,83	65	238,25		10	35,5			
4,6	87	76,8	72,5	99,25	195,4	90	77,56	71,88	126,56	389
5,6	52,5	46,88	52,83	97,62		70	65,417	63,8	90,43	

Tableau No. 8 : Coûts totaux des différentes activités selon l'accélération

Comme on peut le remarquer, le coût de l'activité (4,6) par exemple est décroissant lorsque l'accélération varie de zéro à deux unités et il devient croissant lorsque l'activité est réduite de trois ou quatre unités. La variation est nette à l'aide du graphique suivant.

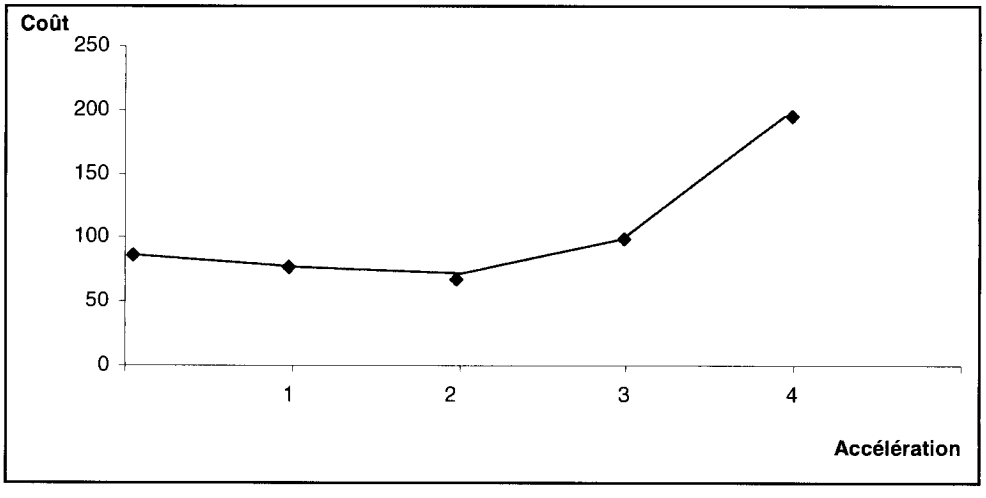


Figure 10 : Illustration graphique du coût total de l'activité (4,6) selon l'accélération.

C'est pour cette raison que nous ne pouvons déterminer au préalable l'évolution du coût en fonction de l'accélération. En effet, lorsque l'allocation de ressource ainsi que son coût suivent des fonctions qui dépendant de la durée et/ou de la quantité, le coût final ne peut dès lors être une fonction déterminée.

Si le gestionnaire de projet envisage achever le projet pendant la plus petite durée possible avec le plus bas incrément de coût, il lui incombe alors de déterminer pour chaque activité l'étendu de la réduction et le mode adéquat.

À l'aide de la fonction d'optimisation de coût le preneur de décision peut déterminer le coût afférent à la plus petite durée possible. En prenant les modes un à un on aura :

- La plus petite durée que peut atteindre le projet selon le mode 1 est 6 unités de temps à un coût total $CT_{(m1)}$ égal à 977,25 um. ($CT_{(m1)}$ = 977,25 um.).
- La plus petite durée que peut atteindre le projet selon le mode 2 est 7 unités de temps à un coût total $CT_{(m2)}$ égal à 785 um. ($CT_{(m2)}$ = 785 um.).

À l'aide de ce modèle (combinaison des deux modes) le projet peut être accéléré jusqu'à Dr = 6 qui est la plus petite durée possible selon le mode 1 mais à un coût global de 804,19 um. Les activités formant le réseau sont alors triées des deux modes admissibles et offrant une augmentation minimale de coût. Les détails des réductions effectuées et le mode sélectionné sont comme suit :

$A_{(i,j)}$	Réduction	Mode	Dr	Coût
1,2	**4**	**2**	**2**	**267**
1,3	2	2	2	88
2,4	**2**	**1**	**2**	**81**
3,4	3	1	2	108.5
3,5	1	2	1	35.5
4,6	**3**	**2**	**2**	**126.56**
5,6	3	1	2	97.62
Tot			**6**	**804,19**

Tableau No. 9 : Détails des incréments de coût selon le mode sélectionné

2/ Résolution du problème d'optimisation de la durée

Sur la base des paramètres du projet évoqués en haut nous pouvons formuler le problème d'optimisation de la durée comme suit :

Min DR = t_N

La fonction-objectif de la durée permet d'atteindre la date d'achèvement du projet la plus précoce tout en respectant les relations de précédence des activités. La fonction d'optimisation du coût et celle d'optimisation de la durée sont conflictuelles.

$$T_2^{Chc1} = t_1^{Chc1} + Min\ [Dn_{12} - y_{12}]\ (Xm_i)$$
$$T_4^{Chc1} = t_2^{Chc1} + Min\ [Dn_{24} - y_{24}]\ (Xm_i)$$
$$T_6^{Chc1} = t_4^{Chc1} + Min\ [Dn_{46} - y_{46}]\ (Xm_i)$$

$$T_3^{Chn1} = t_1^{Chn1} + Min\ [Dn_{13} - y_{13}]\ (Xm_i)$$
$$T_4^{Chn1} = t_3^{Chn1} + Min\ [Dn_{34} - y_{34}]\ (Xm_i)$$
$$T_6^{Chn1} = t_4^{Chn1} + Min\ [Dn_{46} - y_{46}]\ (Xm_i)$$

$$T_3^{Chn2} = t_1^{Chn2} + Min\ [Dn_{13} - y_{13}]\ (Xm_i)$$
$$T_5^{Chn2} = t_3^{Chn2} + Min\ [Dn_{35} - y_{35}]\ (Xm_i)$$
$$T_6^{Chn2} = t_5^{Chn2} + Min\ [Dn_{56} - y_{56}]\ (Xm_i)$$

Sujet à : Outre les contraintes (1), (2), (3), (5), (6) et (7),

(8) et (9) $t_1^{Chc1} = 0$

$t_1^{Chn1} = 0$

$t_1^{Chn2} = 0$

(10) Chc_1 entier, $Chc_1 > 0$

(11) Chn_1 entier, $Chn_1 \geq 0$

Chn_2 entier, $Chn_2 \geq 0$

(12) $t_6^{Chc1} = t_N$

(13) $t_6^{Chc1} \geq t_6^{Chn1}$

$t_6^{Chc1} \geq t_6^{Chn2}$

3/ Résolution du problème d'optimisation de la qualité

La fonction d'optimisation de la qualité est aussi une fonction conflictuelle à celles de la durée et de coût.

Quel que soit le mode adopté et la réduction effectuée, la qualité est toujours supérieure ou égale au seuil limite initialement fixé. Ce dernier est le même que ce soit pour le mode 1 que pour le mode 2. Le tableau No. 9 expose les pentes de la qualité pour toutes les activités selon le mode 1 et 2 ainsi que les différents seuils (Ps).

	Mode 1					Mode 2				
$A_{(i,j)}$	$Dn_{(i,j)}$	$Dr_{(i,j)}$	$r_{(i,j)}$	$PQ_{(i,j)}$	$Ps_{(i,j)}$	$Dn_{(i,j)}$	$Dr_{(i,j)}$	$r_{(i,j)}$	$PQ_{(i,j)}$	$Ps_{(i,j)}$
1,2	7	3	4	0,01	0,96	6	2	4	0,01	0,96
1,3	5	2	3	0,01	0,96	4	2	2	0,01	0,96
2,4	4	1	3	0,02	0,94	6	3	3	0,01	0,94
3,4	5	2	3	0,01	0,94	7	3	4	0,01	0,94
3,5	4	1	3	0,02	0,94	2	1	1	0,01	0,94
4,6	6	2	4	0,01	0,96	5	1	4	0,01	0,96
5,6	5	2	3	0,02	0,94	7	4	3	0,02	0,94

Tableau No.10 : variation de la qualité et seuils minimums

$PF = Max\ (1/A) \sum_{mi} \sum_{ij} [\ 1 - (PQ_{(i,j)} * y_{(i,j)})\ ] * X_{(i,j)}m_i$

La fonction permet de déterminer le niveau final de la qualité du projet. La fonction objectif s'interprète comme étant la somme de tous les niveaux de la qualité finale de toutes les activités divisées par le nombre des activités dans le projet (A).

Sujet à: Outre les contraintes (1), (2), (3), (5), (6) et (7)

(14) $0.96 \leq Pf_{(1,2)}$

$0.96 \leq Pf_{(1,3)}$

$0.94 \leq Pf_{(2,4)}$

$0.94 \leq Pf_{(3,4)}$

$0.94 \leq Pf_{(3,5)}$

$0.96 \leq Pf_{(4,6)}$

$0.94 \leq Pf_{(5,6)}$

Si nous retenons l'accélération comme précisé dans le tableau No. 9, la qualité totale du projet sera de 0.967 qui est une moyenne arithmétique de tous les niveaux de la qualité de toutes les activités.

$A_{(i,j)}$	$Dn_{(i,j)}$	$Dr_{(i,j)}$	$r_{(i,j)}$	$PQ_{(i,j)}$	$Ps_{(i,j)}$	$Pf_{(i,j)}$
1,2	6	2	4	0,01	0,96	**0,96**
1,3	4	2	2	0,01	0,96	**0,98**
2,4	4	2	2	0,02	0,94	**0,96**
3,4	5	2	3	0,01	0,94	**0,97**
3,5	2	1	1	0,01	0,94	**0,99**
4,6	5	2	3	0,01	0,96	**0,97**
5,6	5	2	3	0,02	0,94	**0,94**
Moyenne						**0,967**

Tableau No. 11 : Qualité finale des activités

4/ Conclusion

Trois fonctions conflictuelles sont donc élaborées qui permettent d'optimiser l'allocation des ressources et le compromis durée-coût-qualité. Le preneur de décision aura toutefois le choix de déterminer des seuils pour deux fonctions et chercher la solution optimale pour l'autre à l'instar du modèle de Babu et Suresh, (1996).

La tendance de retenir le coût comme un coût agrégé des différentes ressources n'a pas été retenue ce qui permet de considérer chacune des ressources utilisées ainsi que leurs poids pour l'achèvement de chaque activité. Chaque coût possède dès lors sa fonction qui est propre à l'activité et propre à sa possibilité et son étendu d'accélération. À côté des coûts des ressources supplémentaires, le modèle tient en compte la variation de coût au niveau des ressources initiales résultante de l'accélération.

La quantité de ressource nécessaire elle aussi a été considérée comme une fonction dépendante de la durée de travail. Ces considérations font ajuster le modèle à la réalité des projets et à la réalité de l'allocation des ressources.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail vient contribuer pour combler un ensemble de creux dans le domaine de la gestion de projet et plus précisément dans l'accélération de projet.

Nous avons pu mettre l'accent à travers ce travail sur l'importance de considérer le rapport durée-ressource au lieu de celui durée-coût qui est retenu comme base de recherche depuis de longues années. Nous avons pu montrer à cet effet, l'intérêt que doit manifester le gestionnaire de projet à l'allocation des ressources en tant qu'élément simulateur des autres spécificités du projet (durée, coût et la qualité).

L'objectif général de la présente recherche consiste en l'élaboration d'une méthode permettant d'aider le gestionnaire de projet à trouver le dosage adéquat entre l'allocation des ressources et les trois contraintes du triangle vertueux.

La question spécifique de la recherche consiste quant à elle à mettre au point un modèle permettant de répondre aux besoins du gestionnaire du projet au titre de l'allocation de ressources et le compromis entre la durée, le coût et la qualité.

L'allocation d'un type différent de ressources peut faire varier la durée nécessaire de réalisation d'une activité et bien évidemment un coût différent et une qualité différente. Ainsi le choix entre les différentes combinaisons durée-ressources constitue un majeur problème auquel doit faire face le gestionnaire de projet et c'est ce que nous avons tenté de résoudre par ce travail.

Dans ce travail nous sommes inspirés par les modèles développés par Babu et Suresh, (1996) et Ahn, et Erenguc, (1998) pour développer le notre. En effet, trois fonctions-objectifs ont été élaborées permettant d'optimiser la durée, le coût et la qualité. Le travail consiste en une reformulation de la façon d'allocation des ressources aussi bien initiales que supplémentaires tout en s'approchant au plus de la réalité des projets par l'introduction de la notion des fonctions spécifiques pour l'allocation des ressources et les coûts afférents.

Chaque combinaison ressource-activité dispose d'une fonction d'allocation propre. Le coût unitaire aussi dispose d'une fonction propre qui, selon le cas, peut dépendre de la durée ou de la quantité.

Mais il reste un travail à améliorer. En effet, la notion de coût a été prise globalement et n'a pas tenu en compte les coûts imprévus par exemple, même si leurs recension demeure non réalisable à l'avance.

Ce travail a considéré certes la dépréciation de la qualité mais n'a pas tenu en compte en détail les habiletés et les compétences des ressources disponibles. Ces exigences, telles que présentées sont prises dans l'ensemble pour l'achèvement d'une activité selon un mode déterminé. Néanmoins, il est possible de reconsidérer la dépréciation de la qualité selon d'autres types de fonctions qui dépendent de la durée et/ou des compétences des ressources engagées.

Les fonctions retenues dans ce travail demeurent à titre indicatif et simple, elles ne reflètent pas vraiment la réalité qui se montre souvent plus complexe. Un travail de classification et de catégorisation des tâches semble nécessaire afin de les associer à des fonctions adaptées et spécifiques. Ce travail constitue une piste prometteuse qui n'a pas été explorée jusqu'à date et que nous espérons approfondir dans des travaux futurs. Toutefois, nous demeurons ouverts à toute critique constructive, à toute remarque ou suggestion permettant de pousser plus loin et d'améliorer cette recherche.

Références

AHN T., ET ERENGUC S. S. (1998), *The resource constrained project scheduling problem with multiple crashable modes: A heuristic procedure, European Journal of operational Research, vol. 107, pp. 250 – 259.*

BABU A. J. G. AND SURESH N. (1996), Project management with time, cost and quality consideration, Project Management Journal, vol. 88, No. 2, pp. 320 – 327.

BERT DE R., DEMEUTEMEESTER E. ET HERROELEN W. (1998), Naval Research Logistics, Vol. 45, No. 6, pp. 553 – 578.

BURNS, S. A., LIU, L., ET FENG, C. (1996), *The LP / IP hybrid method for construction time-cost tradeoff analysis, Construction Management and Economics, vol. 14, No. 3, pp. 265 – 276.*

DECKRO R. F. ET J. E. HEBERT, "*A multiple objective programming framework for trade-offs in project scheduling Engineering Costs and Production Economics, vol. 18, No. 3, January 1990, pp. 255-264.*

DEMEULEMEESTER, E. L., HERROELEN, W. S. ET ELMAGHRABY, S. E., (1999), *Optimal procedures for the discrete time/cost trade-off problem in project networks. European Journal of Operational Research, Vol. 8, pp. 50 – 68.*

ELMAGHRABY, S.E., (1977), Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models, Wiley, New York.

ERENGUC S. SELCUK, TAEHO AHN ET DANIEL G. CONWAY, 2000, The Resource Constrained Project Scheduling Problem with Multiple Crashable Modes: An Exact Solution Method, Naval Research Logistics, Vol. 48, No. 2, 2000, pp. 107 – 127.

FALK E. JAMES et HOROWITZ L. JOEL, 1972, *Critical path problems with concave cost-time curves, Management Science, Vol. 19, No. 4, December, 1972, pp. 446 – 455.*

FULKERSON, D. R., "*A Network Flow Computation for Project Cost Curves," Management Science, Vol. 7, No. 2 (January 1961), pp. 167-178.*

GORDON J. AND TULIP A. (1997), Resource Scheduling, *International Journal of Project Management, Vol. 15, No. 6, pp. 359 – 370.*

GOYAL, S. K., *A NOTE ON "A Simple CPM Time-Cost Tradeoff Algorithm", Management Science, Vol. 21, No. 6, February, 1975*, pp. *718 – 722.*

KELLEY, J. E., JR., *"Critical-Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis," Operations Research, Vol. 9, No. 3 (1961), pp. 296-320.*

KERZNER, H. (2001), *Project Management: A systems Approach to planning, Scheduling and Controlling (7e éd.), New York: John Wiley & Sons Inc.*

KHANG DO BA ET YIN MON MYINT, *Time, cost and quality trade-off in project management: a case study, International Journal of Project Management Vol. 17, No. 4, August 1999, pp. 249-256.*

MOUSSOURAKIS J, HAKSEVER C. *Flexible model for time / cost tradeoff Problem. Journal of Construction Engineering Management, 2004; Vol. 130, No. 3, pp. 307 - 314.*

NUDTASOMBOOM N. et RANDHAWA SABAH U., 1997, *Resource-constrained project scheduling with renewable and non-renewable resources and time-resource tradeoffs, Computers and Industrial Engineering, Vol. 32, No. 1, pp. 227 – 242, 1997.*

OISEN, R. P. (1971), *Can project management be defined?. Project Management Quarterly, Vol. 2, No. 1, pp. 12-14.*

PENG W. ET WANG C. (2009), A multi-mode resource-constrained discret time-cost tradeoff problem and its genetic algorithm based solution, *International Journal of Project Management, Vol. 27, 2009, pp. 600 – 609.*

PHILLIPS, JR. STEVE, (1996), *Project Management Duration / Ressource Tradoff Analysis: An Application of the Cut Search Approach, Journal of the Op. Research Society, Vol. 47, pp. 697 – 701.*

PHILLIPS, JR. STEVE ET MOHAMED I. DESSOUKY, (1977), *Solving The Project Time / Cost Tradeoff Problem Using The Minimal Cut Concept, Management Science, Vol. 24. No. 4. December 1977.*

SHAMAS-UR-REHMAN TOUR ET OGUNLANA STEPHEN O. 2010, Beyond the ``iron triangle``: Stakeholder perception of key performance indicators (KPIs) for large-scale public sector development projects, Vol. 28, Avril 2010, No. 3, pp. 228 – 236.

SIEMENS NICOLAI, *A Simple CPM Time-Cost Tradeoff Algorithm, Management Science, Vol. 17; No. 6, February, 1971.*

SIMIN P. PULAT ET STEVEN J. HORN, 1996, *Time-Resource Tradeoff Problem, IEEE Transactions On Engineering Management, Vol. 43, No. 4, NOVEMBER 1996, pp. 411 - 417.*

SLOWINSKI, R. B., (1980), *Two Approaches to Problems of resource allocation Among Project Activities, A comparative Study, European Journal of the Operational Research Society, Vol. 31, No. 8, August 1980, pp. 711 – 723.*

SPRECHER KOLISCH, AND DREXL, Resource-constrained Project Scheduling Problems, Managements Science, Vol. 41, No. 10, October 1995, pp. 1693 – 1703.

TALBOT F. BRIAN (1982), Resource-Constrained Project Scheduling With Time-Resource Tradeoffs: The Non pre-emptive Case, Management Science, Vol. 28, No. 10, pp. 1197 - 1210

TUNG YANG, (2007), *Performing complex project crashing analysis with aid of particle swarm optimization algorithm, International Journal of Project Management, Vol. 25, pp. 637 – 646.*

WILEY VICTOR D., RICHARD F. DECKRO, JACK A. JACKSON JR. (1998), *Optimization analysis for design and planning of multi-project programs, European Journal of Operational Research, Vol. 107, No. 2, 1998, pp. 492 - 506*

Annexes

Annexe 1:

	Mode 1				Mode 2			
$A_{(i,j)}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
1,2	1,00	2,00	2,00	3,00	1,00	2,00	2,00	4,00
1,3	2,00	3,00	3,00		2,00	4,00		
2,4	3,00	3,00	3,00		1,00	2,00	2,00	
3,4	2,00	3,00	3,00		1,00	1,00	2,00	2,00
3,5	3,00	3,00	3,00		4,00			
4,6	2,00	2,00	3,00	3,00	2,00	2,00	4,00	4,00
5,6	2,00	3,00	3,00		1,00	1,00	2,00	

Tableau No. 12 : Cout unitaire de k1 selon la durée de travail

Annexe 2:

	Mode 1				Mode 2			
$A_{(i,j)}$	1	2	3	4	1	2	3	4
1,2	6,00	3,00	2,38	2,17	10,50	5,00	3,75	3,30
1,3	6,00	3,00	2,33	n	9,00	4,50	n	n
2,4	4,40	2,67	2,19	n	10,50	5,00	3,75	
3,4	6,00	3,00	2,33	n	9,00	4,88	3,80	3,38
3,5	5,00	2,67	2,17	n	4,00	n	n	n
4,6	5,33	2,80	2,29	2,11	9,00	4,50	3,50	3,15
5,6	4,67	2,75	2,27	n	9,00	4,88	3,80	n

Tableau No. 13 : Cout unitaire de k2 selon la durée de travail

Annexe 3:

		Mode 1				Mode 2			
$A_{(i,j)}$	K	$y_{(i,j)}=1$	$y_{(i,j)}=2$	$y_{(i,j)}=3$	$y_{(i,j)}=4$	$y_{(i,j)}=1$	$y_{(i,j)}=2$	$y_{(i,j)}=3$	$y_{(i,j)}=4$
	k1	0,33	4,80	18,00	80,00	0,60	8,00	30,00	192,00
	k2	3,00	6,00	12,50	26,00	4,20	7,50	15,00	33,00
1,2	k3	0,25	1,20	2,81	5,60	0,50	2,50	6,25	14,00
	k1	1,50	18,00	85,50		2,00	40,00		
	k2	3,00	6,00	14,00		4,50	9,00		
1,3	k3	0,38	2,00	5,63		0,83	5,00		
	k1	3,00	30,00	189,00		0,40	6,00	24,00	
	k2	3,67	8,00	23,00		4,20	7,50	15,00	
2,4	k3	1,00	5,00	18,00		0,50	2,50	6,25	
	k1	1,00	12,00	54,00		0,17	1,60	13,50	42,67
	k2	3,00	6,00	14,00		4,50	7,80	14,25	27,00
3,4	k3	0,25	1,50	4,50		0,83	3,33	7,50	14,67
	K1	3,00	30,00	189,00		16,00			
	k2	3,33	8,00	26,00		12,00			
3,5	k3	0,50	3,00	11,25		2,50			
	k1	0,80	6,00	36,00	120,00	0,75	6,67	63,00	288,00
	k2	3,20	7,00	16,00	38,00	4,50	9,00	21,00	63,00
4,6	k3	0,30	1,50	3,75	8,40	0,31	2,22	6,56	20,00
	k1	1,00	12,00	54,00		0,50	4,00	31,50	
	k2	3,50	7,33	17,00		4,50	7,80	14,25	
5,6	k3	0,38	2,00	5,63		0,42	2,00	4,69	

Tableau No. 14 : Coût des différentes ressources selon l'accélération