Immobilisation de polygones par des ensembles donnés de points

Mémoire
présenté comme exigence partielle
de la maitrise en informatique

Présenté par
Ion Arbone

sous la direction de
Prof. Jurek Czyzowicz, Ph.D.

Département d'informatique et d'ingénierie
Université du Québec en Outaouais

Octobre 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN OUTAOUAIS

Département d'informatique et d'ingénierie

Ce mémoire intitulé :

Immobilisation de polygones par les ensembles donnés des points

présenté par

Ion Arbone

pour l'obtention du grade de maître ès science (M.Sc.)

à été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Prof. Jurek Czyzowicz, Ph.D. ..... Directeur de recherche

Prof. Mohand Saïd Allili, Ph.D. ..... Président du jury

Prof. Ana-Maria Cretu, Ph.D. ..... Membre du jury

le 30 Octobre 2015

Remerciements

Le succès de cette thèse de maîtrise a été possible grâce à la précieuse collaboration et au support de plusieurs personnes qui me sont chères. Je désire dire MERCI à toutes ces personnes.

Plus particulièrement, je tiens à remercier mon directeur, le professeur Jurek Czyzowicz, Ph.D., qui a été non seulement mon directeur, mais aussi mon guide tout au long de mes études. Merci de m'avoir donné cette opportunité de travailler avec vous.

Je tiens également à souligner la contribution des membres de mon comité de thèse pour leur encouragement et leur soutien.

Je veux dire merci à ma famille qui a beaucoup contribué à la réalisation de cette thèse de maîtrise.

Merci infiniment à vous tous !

Table des matières

Remerciements **i**

Liste des figures **iv**

Résumé **vi**

1 Introduction **2**

1.1 Le Problème 3

1.2 Les Contributions 4

1.3 Le contenu 5

2 Préliminaires mathématiques **7**

2.1 Points, droites, plans 7

2.1.1 Droite orientée 8

2.1.2 Polygones 11

2.1.3 Déplacements 14

2.1.4 Exemples des déplacements 16

2.2 Théorème de Helly 22

2.3 Programmation linéaire si la dimension est constante 23

3 État de l'art **24**

4 Mouvements planaires **34**

4.1 Mouvement d'un point 34

4.2 Mouvement rigide d'une figure 36

4.3 Mouvement d'échappement. Immobilisation 41

4.4 Espace de configurations 42

5 Glissements **54**

5.1 Roulement d'un cercle sur un autre cercle 58

5.2 Roulement d'un cercle *autour* d'un autre situé à l'intérieur 59

6 Algorithmes gloutons **62**

6.1 L'environnement d'immobilisation
en position générale 62

6.2 L'algorithme vérifiant l'immobilisation
en position générale 63

6.3 L'environnement d'immobilisation
en position quelconque 66

**7 Algorithme optimal vérifiant l'immobilisation
en position quelconque** **76**

8 Conclusions **88**

Bibliographie **89**

A Test Glissements Négatifs **92**

Liste des figures

2.1 Les demi-plans déterminés par la droite orientée $\vec{l}$ 9

2.2 Forme hessienne (cf. [1]) de l'équation d'une droite 10

2.3 Translation de coordonnées par translation (cf. [1]) 17

2.4 Rotation d'un système de coordonnées cartésiennes (cf. [1]) 18

2.5 Déplacement (cf. [17]) 21

3.1 Centre instantané de rotation 25

3.2 Les effects d'un point d'obstacle mis a l'intérieur d'un côté 26

3.3 Vérification de la fermeture de forme - La méthode d'analyse graphique 28

3.4 La fermeture de force 30

3.5 Un triangle immobilisé qui n'est pas dans la fermeture de force 32

4.1 Mouvement d'un point 35

4.2 Mouvement d'un segment 38

4.3 Déterminer la position du point Q au moment $t \in [t_0, t_1]$ 39

4.4 Mouvement d'une figure 41

4.5 Un point dans l'espace de configurations corresponde à une position du polygone sur le plan 44

4.6 Toute courbe continue de M à S est un mouvement du polygone . . . 46
4.7 Configurations 47
4.8 La zone de configurations non légales 47
4.9 Espace de configurations 49
4.10 La surface générée dans l'espace de configurations par un point d'obstacle 52
4.11 L'espace de configurations est divisé en cellules par les surfaces correspondant aux points d'obstacle 53

5.1 $C'_{i,j}$ se déplace sur le cercle $\mathcal{C}_r$ 56
5.2 Roulement d'un cercle sur un autre cercle (intérieurement) 59
5.3 Roulement sans glissement du $\mathcal{C}_R$ autour du $\mathcal{C}_r$ 60
5.4 Roulement d'un cercle autour d'un autre cercle (intérieurement) . . . 61

6.1 Théorème de Schooten 68
6.2 Illustration du test si un glissement sur deux points d'obstacle O_i et O_j est empêché par un troisième point O_k 70
6.3 Glissement sur trois segments à la fois 72
6.4 Glissement sur O_i, O_j et O_k à la fois. 73

7.1 Triangle $H_{ij}H_{ik}H_{jk}$ non dégénéré 79
7.2 H_{ij}, H_{ik} et H_{jk} coïncident 80
7.3 Section horizontale dans l'espace de configuration 81
7.4 Polygone immobilisé par six points, tous nécessaires pour l'immobilisation 84
7.5 Polygone emprisonné tel que le seul mouvement d'échappement est le glissement sur 3 points à la fois 85

Résumé

La plupart des robots d'aujourd'hui sont programmés en vue d'accomplir certaines actions prédéfinies, comme celle de maintenir un objet dans une position fixe pour pouvoir le manipuler. Ainsi, le domaine de l'immobilisation est devenu un champ important de la robotique qui joue un rôle primordial dans la construction d'un produit de qualité.

Dans cette étude, nous sommes intéressés à l'analyse du problème d'immobilisation de figures lorsque l'ensemble de positions à partir duquel on peut choisir les points d'immobilisation est imposé au départ. Plus précisément, notre attention porte sur le problème de l'immobilisation de figures dans le cas où l'ensemble de points d'obstacle est restreint à un ensemble fini de positions sur le bord de figures. L'objectif principal de cette recherche a deux volets. Le premier est fondé sur la recherche d'un algorithme qui vérifie si un ensemble donné de points immobilise un objet, tandis que le second est basé sur la recherche d'un algorithme qui trouve un petit sous-ensemble de points d'immobilisation. Nous proposons une approche géométrique, car nous allons analyser l'ensemble de positions valides induites dans l'espace des configurations par les points obstacles. Nous donnons trois algorithmes pour vérifier si un ensemble de points sur le bord d'un objet immobilise ou non l'objet. Le premier algorithme est optimal, mais il fonctionne quand les données sont en position générale. Les deux autres algorithmes, l'algorithme glouton, s'exécutant en temps $O(n^3)$, et l'algorithme plus élaboré, marchant en temps $O(n \log n)$, fonctionnent pour des données quelconques. A notre connaissance, aucune autre algorithme pour ce problème d'immobilisation n'est connu dans la littérature.

Abstract

Most today robots are designed to perform some predefined tasks, e.g. to hold the object at stable position in order to manipulate it. These operations require immobilization of the objects. Immobilization became an important domain of robotics indispensable in efficient design of quality products.

In the present work we study the problem of object immobilization when the set of immobilization points is known to be put in advance on the object's boundary. The main goal of this work is two-fold. Firstly, we give an efficient algorithm verifying if the polygon is immobilized. Secondly, our algorithm outputs a small subset of points, which is sufficient for immobilization. Our approach is geometric, since we geometrically analyze the set of free polygon positions within the configuration space. We give three algorithms. The first algorithm, an optimal one, works for general case of input data. The other two, a greedy $O(n^3)$ algorithm and a more sophisticated $O(n \log n)$ one, work for any input data.

According to our knowledge, no algorithm concerning the problem stated above has been ever studied in the research literature on polygon immobilization.

Chapitre 1

Introduction

La plupart des robots industriels d'aujourd'hui sont programmés en vue de réaliser des tâches précises, comme le fait de maintenir un objet dans une position fixe ainsi que la manipulation et le déplacement des objets, et tout cela afin de faciliter diverses opérations.

Des opérations telles que le contrôle du processus de manipulation ou bien le maintien d'un objet dans une position fixe demandent que les objets soient immobilisés. Dans ce contexte, immobiliser un objet signifie placer les doigts des bras d'un robot sur la surface de l'objet pour empêcher quelconque mouvement. En effet, dans des situations pratiques, l'utilisation future d'un objet fabriqué impose de restrictions sur les endroits où le robot peut mettre ses doigts. Ces restrictions peuvent être engendrées, par exemple, par l'existence des zones fragiles ou des zones réservées pour d'autres opérations. La recherche a montré que, si l'ensemble de points représentant

les endroits où il est permis de mettre les points d'obstacle est connu, il est important de trouver un sous-ensemble de points qui immobilise un objet. Peut-on dire qu'il y a toujours un sous-ensemble de points qui immobilise un objet ?

Dans cette recherche, nous nous sommes intéresses à l'analyse du problème d'immobilisation de figures lorsque l'ensemble de positions à partir duquel on peut choisir les points d'immobilisation est imposé au départ. Plus précisément, notre attention porte sur le problème de l'immobilisation de figures au cas ou l'ensemble de points d'obstacle est restreint à un ensemble fini de positions sur le bord de figures.

L'objectif principal de cette recherche a deux volets. Le premier est basé sur la recherche d'un algorithme efficace qui vérifie si un ensemble donné de points immobilise un objet. Quant au deuxième, nous proposons un algorithme qui trouve un petit sous-ensemble de points d'immobilisation parmi les positions possibles. D'ailleurs, le domaine de l'immobilisation est devenu un champ très important de la robotique qui joue un rôle primordial dans la construction efficace d'un produit de qualité.

1.1 Le Problème

Un polygone P sera défini par l'ensemble ordonné de points $S_1, S_2, ..., S_m$ sur le plan qui représente ses sommets. Sur le périmètre du polygone P est placé un ensemble de points d'obstacle $O = \{O_1, \ldots, O_n\}$ dans positions différentes des sommets du polygone. Considérons une classe de mouvements du polygone (contenant

même les mouvements infinitésimalement petits) pendants lesquels les points d'obstacle restent immobiles. Le polygone est *immobilisé* si et seulement s'il n'existe pas un mouvement pendant lequel un point d'obstacle pénètre l'intérieur du polygone P.

Dans ce mémoire, nous construisons un algorithme de décision vérifiant si un polygone est bien immobilisé par un ensemble de points d'obstacle.

1.2 Les Contributions

Dans ce mémoire, nous donnons trois algorithmes vérifiant l'immobilisation du polygone donné. Tous les trois algorithmes sont basés sur l'analyse des certaines types de mouvements nommés *glissements*. Un glissement est un mouvement du polygone durant lequel deux côtés du polygone restent en contact continue avec deux points d'obstacle, respectivement. Il s'avère qu'à la place d'analyser un nombre infini de mouvements qui peuvent faire échapper le polygone de sa position initiale il est suffisant de considérer $n^2 - n$ mouvements de glissements. Le polygone est immobilisé si et seulement si aucun glissement ne peut faire échapper le polygone.

Notre mémoire présente trois algorithmes vérifiant l'immobilisation du polygone. Le premier algorithme, basé sur la programmation linéaire, solutionne le problème quand les données de départ sont en *position générale*. Polygones générés de façon aléatoire sont en position générale. Cet algorithme fonctionne en temps $O(n)$.

Le deuxième algorithme est un algorithme glouton qui vérifie s'il existe ou non

un glissement d'échappement, c'est à dire un glissement qui n'est pas empêché par aucun point d'obstacle. Vu que l'on a $O(n^2)$ glissements et $O(n)$ points d'obstacle, l'analyse exhaustive conduit à un algorithme fonctionnant en temps $O(n^3)$.

Le troisième algorithme vérifie s'il existe un glissement d'échappement par une méthode plus efficace. On traite les points d'obstacle en ordre angulaire de côté qui contient le point d'obstacle. On observe qu'il existe un traitement en temps $O(n)$ qui détermine s'il y a une cellule d'échappement dans l'espace de configurations. La complexité de cet algorithme est $O(n \log n)$.

Selon nos connaissances, aucun algorithme pour ce problème n'est connu dans la littérature. En conséquence, tous les trois algorithmes présentés dans ce texte sont nouveaux.

1.3 Le contenu

Pour la première partie de ce travail, dans le chapitre 2, nous proposons une courte présentation des notions mathématiques de base utilisées au long de ce travail afin d'offrir au lecteur une meilleure compréhension quant à notre démarche.

Ensuite, dans le chapitre 3, nous présentons une revue des différents résultats pertinents des autres recherches obtenus dans le domaine de l'immobilisation. Ainsi, dans cette section de notre recherche, nous présentons les notions d'immobilisation de premier ordre et l'immobilisation de deuxième ordre.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les notions nécessaires au développement des fonctions qui seront utilisés dans l'algorithme proposé par nous. Nous proposons une approche géométrique, car nous allons analyser d'un point de vue géométrique l'ensemble de positions valides induites dans l'espace des configurations par les points obstacles.

Finalement, dans les trois derniers chapitres nous allons présenter nos propres résultats. De cette façon, dans le chapitre 5 nous allons introduire la notion de glissement sur deux points et nous faisons les observations fondamentales les concernant. Dans le chapitre 6, nous proposerons un algorithme glouton pour vérifier si un ensemble de points sur le bord d'un objet immobilise ou non l'objet. Chapitre 7 présente un algorithme optimal pour des données en position générale.

Chapitre 2

Préliminaires mathématiques

2.1 Points, droites, plans

Soit $\mathcal{E}$ - l'espace Euclidien à deux dimensions $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Si l'espace Euclidien $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est muni d'un repère orthonormé direct noté $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la position d'un point M est spécifiée par un couple de nombres (x_M, y_M). Ces nombres sont appelés *coordonnées cartésiennes*.

Notons que le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dit *orthonormé* si les axes du système de coordonnées sont perpendiculaires, c'est-à-dire $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

Repère *direct* signifie que la notation des axes est choisie de telle sorte qu'une rotation d'un angle de 90^o de l'axe des x, ou axe des *abscisses*, dans le sens mathématique positif (sens inverse des aiguilles de montre) amène le demi-axe des x positifs sur le demi-axe de y positifs. L'axe des y est appelé aussi l'axe des *ordonnées*.

Soit $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ deux points du plan. La distance entre P_1 et P_2 est calculée par le théorème du Pythagore :

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.1}$$

Définition 2.1. *Une* droite affine *est l'ensemble de points de coordonnées* (x, y) *tels que :*

$$ax + by + c = 0, \tag{2.2}$$

$a, b, c \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0)$.

L'équation 2.2 est appelée *l'équation cartésienne* de la droite.

Étant donné deux points distincts du plan, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_1 \neq P_2$, il existe une seule *droite* contenant P_1 et P_2. On va la noter (P_1P_2) ou (P_2P_1). L'équation de cette droite (cf. [1]) est la suivante :

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0. \tag{2.3}$$

2.1.1 Droite orientée

Définition 2.2. *Une droite sur laquelle nous avons choisi un sens est appelée* droite orientée.

Une droite orientée l sera dénotée par $\vec{l}$. On va dénoter par $\overrightarrow{P_1P_2}$ le vecteur

engendré par les points P_1 et P_2 et par $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ la longueur du vecteur. Si la droite $l = (P_1P_2)$ a été orientée dans le sens du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$, on va dire que *le sens positif* de la droite $\vec{l}$ est le sens du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$.

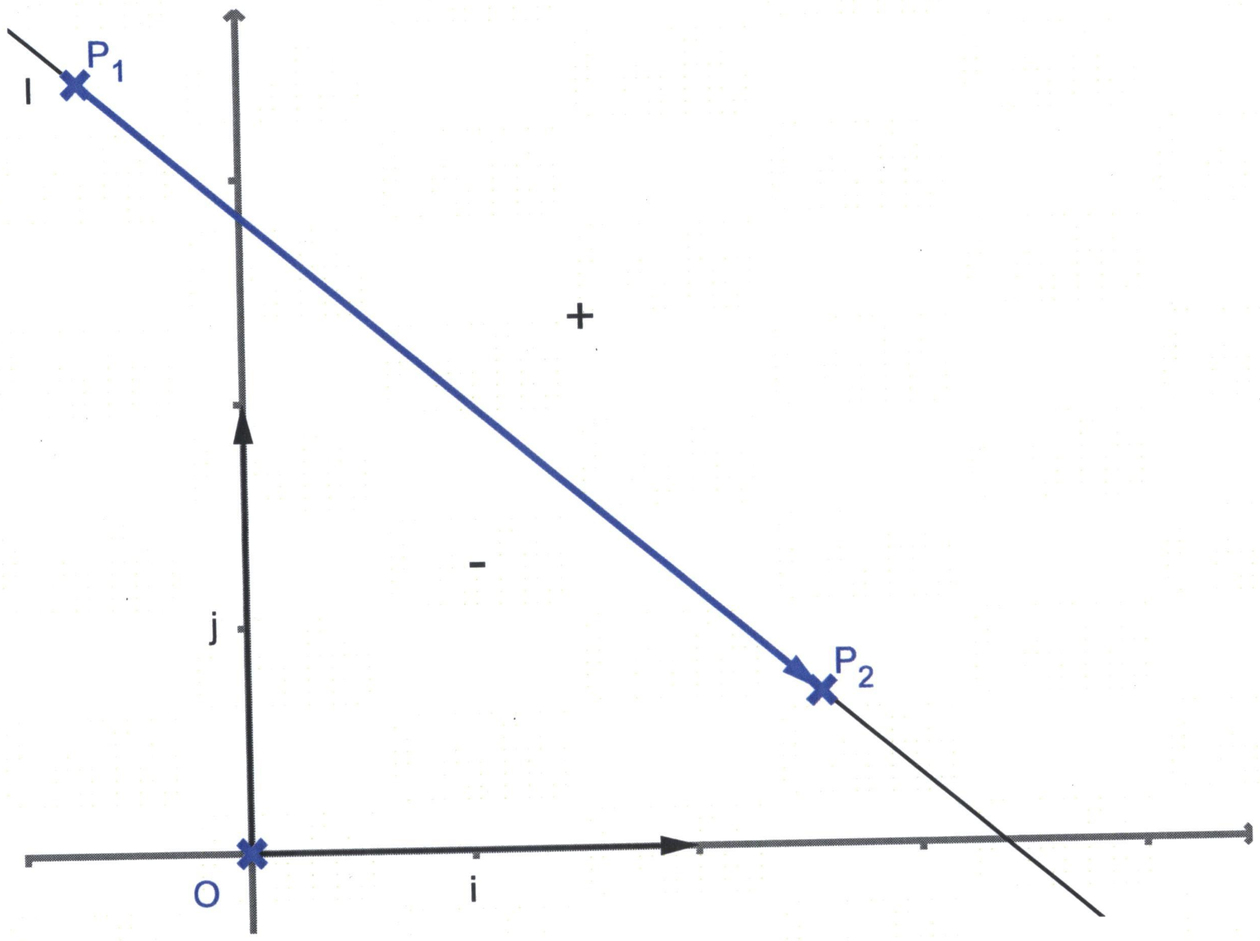


FIGURE 2.1 – Les demi-plans déterminés par la droite orientée $\vec{l}$

Une droite orientée $\vec{l}$ divise le plan en deux demi-plans (voir Figure 2.1). Le demi-plan situé à gauche de $\vec{l}$ avec $\overrightarrow{P_1P_2}$ orienté verticalement vers le haut est appelé *positif* et le demi-plan situé à droite est appelé *négatif*. Pour trouver l'équation hessienne d'une droite orientée $\vec{l}$, prenons un point P à la distance d de $\vec{l}$. Supposons que Q est le point de projection de P sur $\vec{l}$ et R - le point de projection de P sur l'axe $\vec{\imath}$ (cf. Figure 2.2). Supposons que $\vec{n}$ est la droite orientée passant par l'origine et normale à $\vec{l}$, orientée de tel sorte que $\widehat{(\vec{l},\vec{n})} = 90\,°$. Dénotons par φ l'angle $\widehat{(\vec{\imath},\vec{n})}$.

Finalement, supposons que p est une valeur telle que $|p|$ est la distance de l'origine O de $\vec{l}$ et $p \geq 0$ si l'origine O se trouve dans le demi-plan négatif engendré par $\vec{l}$ et $p \leq 0$ si l'origine O se trouve dans le demi-plan positif de $\vec{l}$.

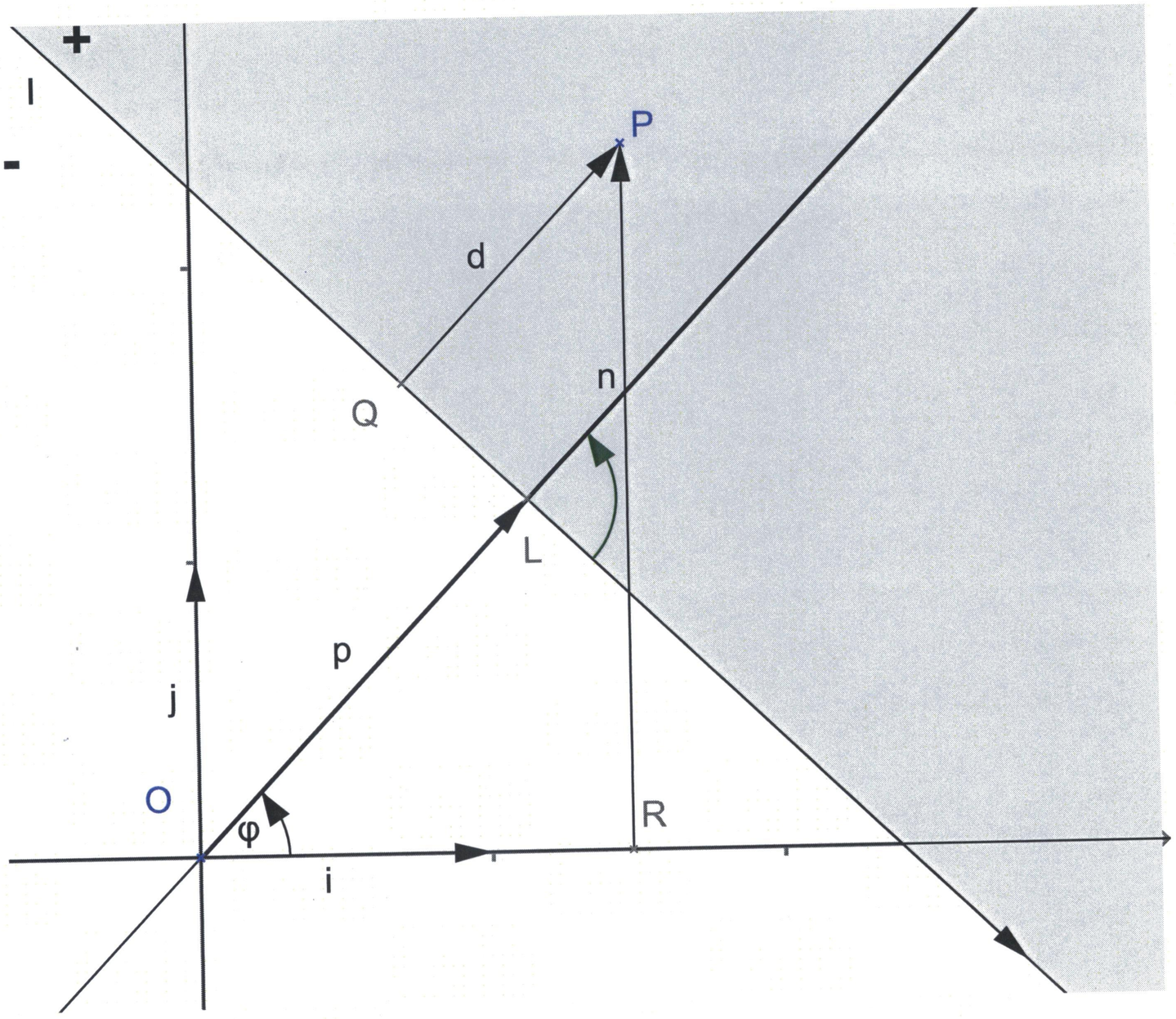


FIGURE 2.2 – Forme hessienne (cf. [1]) de l'équation d'une droite

Compte tenu que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$$

par la projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur la droite orientée $\vec{n}$, on va obtenir :

$$p + 0 + d = x \ \cos\varphi + y \ \cos(\varphi - \pi/2)$$

$$d = x \ \cos\varphi + y \ \sin\varphi - p \tag{2.4}$$

La valeur d est positive si le point P est situé dans le demi-plan positif de $\vec{l}$ et négative pour les points situés dans le demi-plan négatif. Pour le point P situé sur la droite l, on a que la distance $d = 0$. Donc, l'équation de la droite l est la suivante :

$$x \ \cos\varphi + y \ \sin\varphi - p = 0. \tag{2.5}$$

2.1.2 Polygones

Définition 2.3. *Soit $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, deux points du plan. Le* segment orienté *$[P_1P_2]$ est l'ensemble de points sur la droite orientée $\overrightarrow{(P_1P_2)}$ situés entre les points P_1 et P_2. Le segment orienté $[P_1P_2]$ est défini par l'équation*

$$[P_1P_2] = \{(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)) \mid t \in [0, 1]\}. \tag{2.6}$$

Pour $t = 0$, on va obtenir le point P_1 et pour $t = 1$ le point P_2.

Proposition 2.1. *Un point $P \in [P_1P_2]$ si et seulement si $|P_1P| + |PP_2| = |P_1P_2|$.*

Démonstration. 2.1 1). Si $P(x_p, y_p) \in [P_1P_2]$ alors $\exists t \in [0, 1]$ tel que $(x_p, y_p) =$

$(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$. Donc,

$$\begin{aligned} |P_1P| + |PP_1| &= \sqrt{t^2((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)} + \sqrt{(1 - t^2)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)} \\ &= (t + 1 - t)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= |P_1P_2|. \end{aligned}$$

2) On doit prouver que $P \notin [P_1P_2] \Rightarrow |P_1P| + |PP_2| = |P_1P_2|$.

2a) Si $P \notin (P_1P_2)$, alors prenons point Q - la projection du point P sur la droite (P_1P_2). On a $|P_1P| > |P_1Q|$ et $|PP_2| > |QP_2|$, donc $|P_1P| + |PP_2| > |P_1Q| + |QP_2| = |P_1P_2|$.

2b) Soit $P \notin [P_1P_2]$ et $P \in (P_1P_2)$.

2b1) $P_1 \in [PP_2] \Rightarrow |PP_2| > |P_1P_2| \Rightarrow |P_1P| + |PP_2| > |P_1P_2|$

2b2) $P_2 \in [P_1P] \Rightarrow |P_1P| > |P_1P_2| \Rightarrow |P_1P| + |PP_2| > |P_1P_2|$

□

Soit P_1, P_2, P_3, ..., P_m m points distincts du plan.

Définition 2.4. *On va dénommer* polygone *la figure sur le plan bornée par la suite des m segments orientés $[P_1P_2]$,$[P_2P_3]$,...,$[P_{m-1}P_m]$,$[P_mP_1]$. On va dénoter ce polygone par $P_1P_2P_3...P_m$.*

Les points $\{P_i \mid i = 1, ..., m\}$ sont les *sommets* du polygone. Pour simplifier la notation, par P_{m+1} on va comprendre le point P_1. Les segments orientés $\{[P_iP_{i+1}] \mid i = 1, ..., m\}$

sont appelés les *côtés* du polygone. La suite des côtés $[P_1P_2], [P_2P_3], \cdots, [P_{m-1}P_m], [P_mP_1]$ s'appelle le *bord* du polygone.

Définition 2.5. *Un polygone est dit* croisé *si* $\exists i, j \in \{1, 2, ..., m\}, i \notin \{j-1, j, j+1\}$ *tel que* $[P_iP_{i+1}] \cap [P_jP_{j+1}] \neq \emptyset$*, c'est-à-dire, si au moins deux de ses côtés non consécutifs se coupent.*

Définition 2.6. *Le polygone qui n'est pas croisé est appelé polygone* simple.

Tout au longue de ce mémoire, par *polygone*, on va comprendre un *polygone simple.*

À chaque sommet P_i est associé un angle $\widehat{P_i} = (\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iP_{i-1}})$

Pour chaque côté $[P_iP_{i+1}]$, on peut associer la droite orientée engendrée par les points P_i et P_{i+1}. Ces droites orientées s'appellent *côtés prolongés* du polygone. Le bord du polygone délimite le plan en deux régions : une région bornée, appelée *l'intérieur du polygone*, et une partie non bornée, appelée *l'extérieur du polygone.* On suppose que les sommets du polygone sont numérotés de telle sorte que dans le voisinage du chaque côté $[P_iP_{i+1}]$, l'intérieur du polygone se trouve à gauche du segment orienté $[P_iP_{i+1}]$ et l'extérieur du polygone se trouve à droite. On appelle une *diagonale* du polygone un segment reliant deux sommets P_i et P_j du polygone, $i \notin \{j-1, j+1\}$, ce qui veut dire que $[P_iP_j]$ n'est pas un côté du polygone.

Définition 2.7. *On dit qu'un polygone est* convexe *si toutes ses diagonales appartiennent à l'intérieur du polygone.*

Proposition 2.2. *Soit $P_1P_2...P_m$ un polygone convexe et $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $i = 1, ..., m$, les équations hessiennes des côtés prolongés du polygone. L'intérieur du polygone $P_1P_2...P_m$ est alors :*

$$\{(x, y) \mid \forall i \in 1, ..., m, a_ix + b_iy + c_i > 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{(x, y) \mid a_ix + b_iy + c_i > 0\}$$

Définition 2.8. *On dit qu'un polygone est* concave *s'il n'est pas convexe.*

2.1.3 Déplacements

Définition 2.9. *Une* isométrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *est une application qui conserve les distances, c'est à dire :*

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, |f(A)f(B)| = |AB|$$

Proposition 2.3. *Une isométrie est une fonction injective.*

Démonstration. Soit f une isométrie. On doit prouver que $f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$.

On sait que $|AA| = 0$ et que $A \neq B \Rightarrow |AB| > 0$, donc $f(A) = f(B) \Rightarrow |f(A)f(B)| = 0$.

Puisque les isométries conservent les distances on a

$$|AB| = |f(A)f(B)| = 0$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow A = B.$$

□

Proposition 2.4. *Une isométrie transforme un segment (respectivement une demi-droite, une droite) en un segment (respectivement une demi-droite, une droite).*

Démonstration.

$$M \in [AB] \Leftrightarrow |AM| + |MB| = |AB| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(A)f(M)| + |f(M)f(B)| = |f(A)f(B)| \Leftrightarrow f(M) \in [f(A)f(B)]$$

$f(M) \in [f(A)f(B)] \Rightarrow f([AB]) \subset [f(A)f(B)]$.

Soit $N \in [f(A)f(B)]$, donc $|f(A)N| < |f(A)f(B)| = |AB|$. Sur le segment, on va choisir le point $M \in [AB]$ de sorte que $|AM| = |f(A)N|$.

On a
$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |f(A)f(B)| \\ |AB| = |AM| + |MB| \\ |f(A)f(B)| = |f(A)N| + |Nf(B)| \\ |AM| = |f(A)N| \end{array}\right\} \Rightarrow f(M) = N \text{ donc } f[AB] = [f(A)f(B)].$$

□

Proposition 2.5. *Une isométrie est une fonction bijective.*

L'isométrie $Id : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $Id(A) = A$, $\forall A \in \mathcal{E}$ est appelée l'identité.

On dit qu'une isométrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ conserve les angles orientés des vecteurs ou *conserve l'orientation* si, pour tous points $A, B, C \in \mathcal{E}$ distincts, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)})}.$$

Définition 2.10. *Un* déplacement *ou une isométrie positive est une isométrie qui conserve l'orientation.*

On note $Is^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des déplacements du plan $\mathcal{E}$.

2.1.4 Exemples des déplacements

Translations

Soit $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ deux systèmes de coordonnées distincts. $\mathcal{R}_1$ de coordonnées x et y et $\mathcal{R}_2$ de coordonnées η et ξ, et l'origine O_2 de $\mathcal{R}_2$ a pour coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}_1$. Le même point P a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_1$ et (η, ξ) dans $\mathcal{R}_2$ (voir Figure 2.3). Les formules pour transformation de coordonnées

par translation sont (cf. [1]) :

$$(x, y) = (a, b) + (\eta, \xi) \tag{2.7}$$

$$(\eta, \xi) = (x, y) - (a, b) \tag{2.8}$$

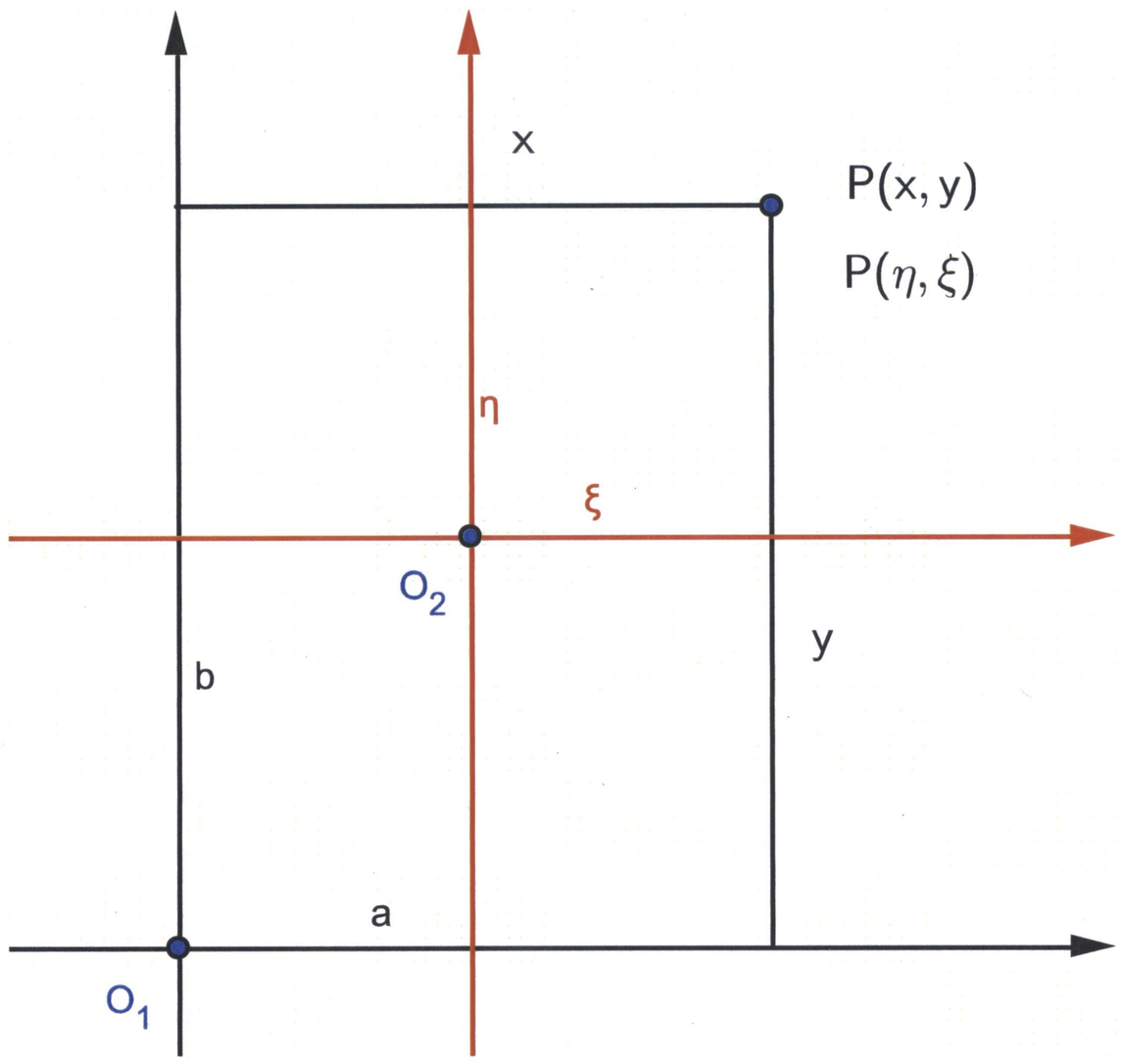


FIGURE 2.3 – Translation de coordonnées par translation (cf. [1])

Rotations

Soit $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ deux systèmes de coordonnées distincts. Le système $\mathcal{R}_2$ de coordonnées (η, ξ) est obtenu du système $\mathcal{R}_1$ de coordonnées (x, y)

par une rotation d'angle ψ autour de l'origine O. Soit P un point de coordonnées (x, y) dans le système $\mathcal{R}_1$ et (η, ξ) dans le système $\mathcal{R}_2$ (voir Figure 2.4).

Pour obtenir les formules de transformation de coordonnées par la rotation du système (x, y) d'un angle ψ, on va projeter $\overrightarrow{OP}$ sur l'axe des x et sur l'axe des y.

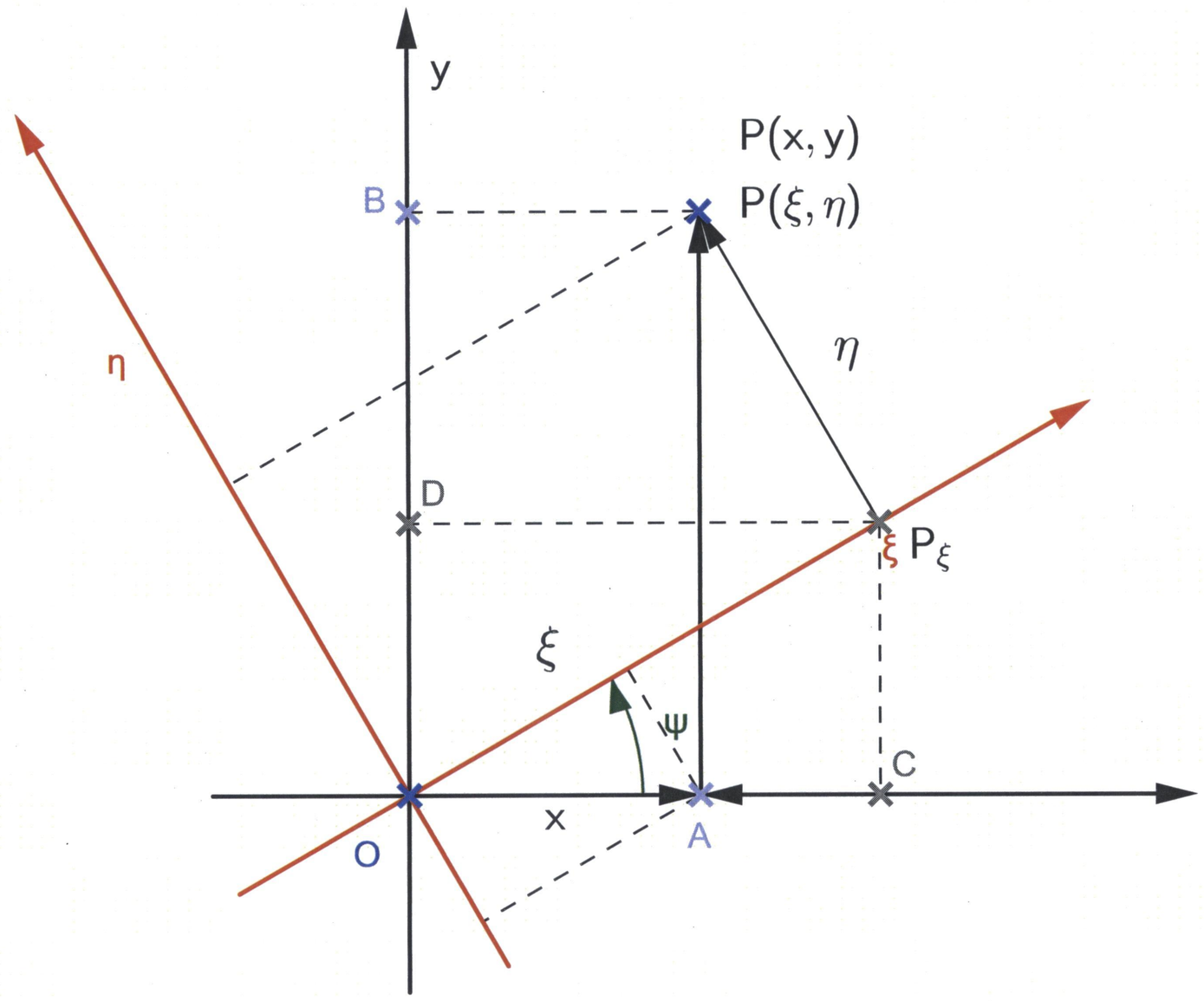


FIGURE 2.4 – Rotation d'un système de coordonnées cartésiennes (cf. [1])

On observe que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_\xi} + \overrightarrow{P_\xi P}$. L'abscisse du point P dans le système de coordonnées $\mathcal{R}_1$, la valeur de x, est la projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur l'axe Ox. Donc, $x = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = \xi \cos\psi - \eta \sin\psi$. L'ordonnée du point P dans le système de coordonnées $\mathcal{R}_1$, la valeur de y, est la projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur l'axe Oy. Donc,

$y = \overline{OB} = \overline{OD} + \overline{DB} = \xi \sin\psi + \eta \cos\psi.$

$$\begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi, & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} \xi, & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Observation 2.6. *La rotation autour d'un point quelconque $R(x_R, y_R)$ peut être vue comme une rotation de même angle autour de l'origine O suivie par une translation.*

Proposition 2.7. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie, et $M, N \in \mathcal{E}$ deux points distincts quelconques et fixés. L'isométrie f est bien défini si on connaît les valeurs $f(M)$ et $f(N)$.*

Démonstration. Soit $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ et $P \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Sur la valeur (position) du M' on n'a aucune restriction, par contre, le point N' doit se trouver à une distance égale à $|MN|$ du point M'. Dans l'espace $\mathcal{E}$, l'ensemble de points satisfaisant à cette condition est un cercle. Le point $f(P)$ doit se trouver à la distance $|MP|$ du M' et à la distance $|NP|$ du N'. Par conséquent, il se trouve à l'intersection de deux cercles et, aussi, il doit conserver l'orientation.

Donc, $f(P)$ se trouve à l'intersection du cercle de rayon $|MP|$ centré au M' et du cercle de rayon $|NP|$ centré au N'. Cette intersection n'est pas vide puisque

$|MN| \leq |MP| + |PN|$ (la propriété de la fonction distance). Elle contient un seul point si le point P se trouve sur la droite MN et deux points si $P \notin MN$. Parmi les deux points, une seul position (point) conserve l'orientation, donc il est bien déterminé par M', N', $|MP|$, $|NP|$ et l'orientation d'angle $\widehat{MNP}$.

□

Théorème 2.8. *$Is^+(\mathcal{E})$ est formé des translations et des rotations.*

Démonstration. Les translations et les rotations sont les déplacements puisqu'elles conservent la distance et l'orientation. On doit prouver qu'elles sont les seules déplacements possibles. Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$, trois points distincts, et $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un déplacement. Supposons, que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ (voir Figure 2.5).

Si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ alors φ est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ ($AA'B'B$ est un parallélogramme).

Si $[AA'] \parallel [BB']$ et $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$ alors φ est une rotation autour du point d'intersection $(AA') \cap (BB')$. ($AA'B'A$ est un trapèze isocèle).

Si $[AA'] \nparallel [BB']$ alors on note D le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AA']$ et de la médiatrice du segment $[BB']$.

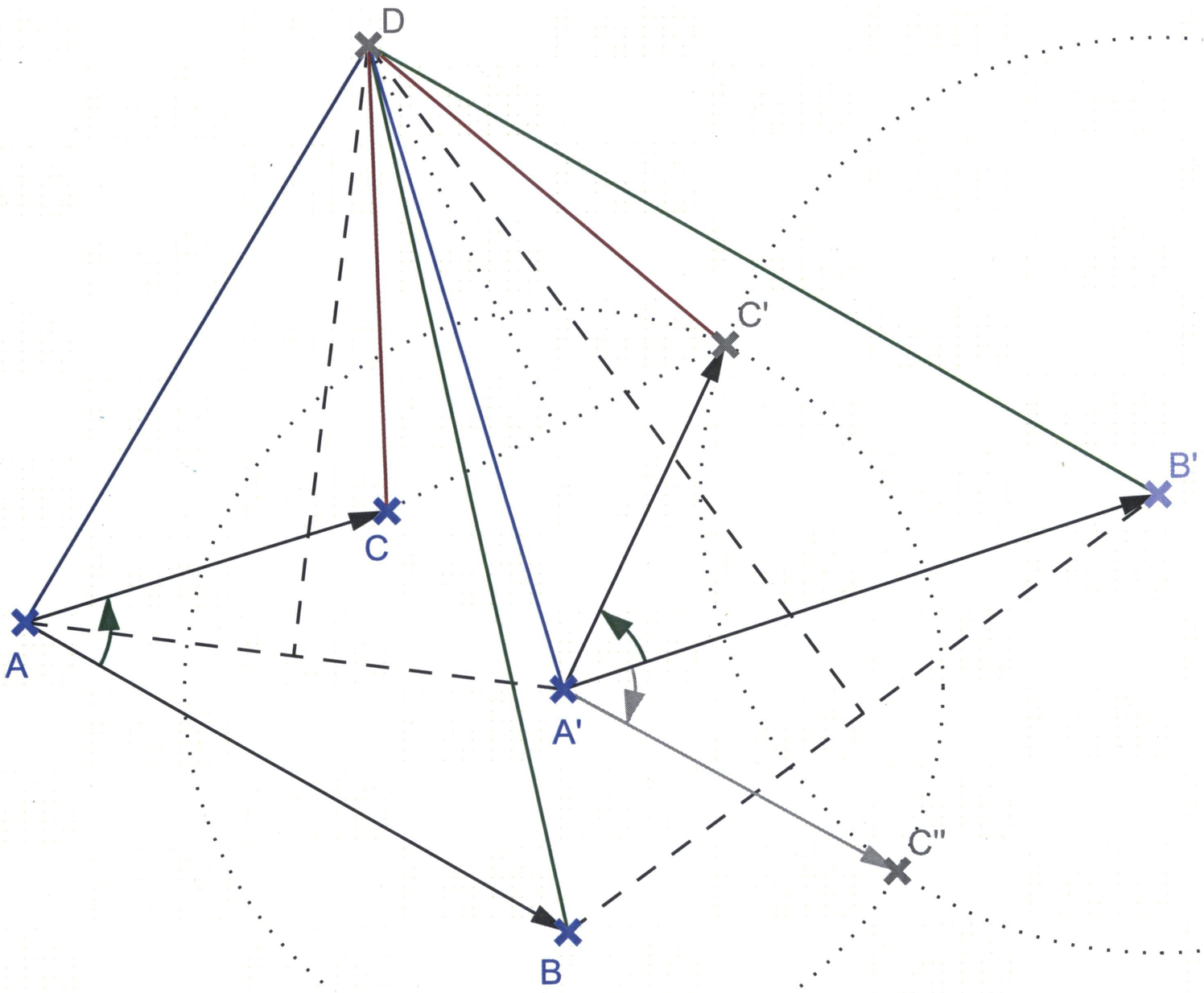


FIGURE 2.5 – Déplacement (cf. [17])

$D =$ médiatrice du segment $[AA'] \cap$ médiatrice du segment $[BB'] \Rightarrow |DA| = |DA'|$ et $|DB| = |DB'|$.

φ est un isométrie $\Rightarrow |AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A\varphi(C)|$ et $|BC| = |B\varphi(C)|$.

$\varphi(C)$ se trouve à l'intersection : $\mathcal{C}(A', |AC|) \cap \mathcal{C}(B', |BC|)$. Par la notation $\mathcal{C}(A', |AC|)$ on comprend le cercle de centre A' et de rayon égal à $|AC|$. Cette intersection n'est pas vide puisque $|AC| + |CB| \geq |AB|$. Puisque φ est un déplacement $\Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'\varphi(C)})}$. Soit $\{C', C''\} = \mathcal{C}(A', |AC|) \cap \mathcal{C}(B', |BC|)$. On note C' le point qui

conserve l'orientation du l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, c'est à dire que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$.

Si $|AC|+|CB| = |AB|$ alors l'intersection contient un seul point qui conserve l'orientation.

$$\left.\begin{array}{l} |DA| = |DA'| \\ |DB| = |DB'| \\ |AB| = |A'B'| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle\ DAB \cong \triangle\ DA'B'$$

Donc $\Rightarrow$ A' et B' sont obtenus par une rotation d'angle $\widehat{ADA'}$ autour du point D.

$$\left.\begin{array}{l} |DA| = |DA'| \\ |DC| = |DC'| \\ |AC| = |A'C'| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle\ DAC \cong \triangle\ DA'C'$$

Donc $\Rightarrow$ A' et C' sont obtenus par une rotation d'angle $\widehat{ADA'}$ autour du point D.

$\Rightarrow$ A', B' et C' sont les images du points A, B et C obtenues par une rotation d'angle $\widehat{ADA'}$ autour du point D. □

2.2 Théorème de Helly

On utilisera le théorème suivant :

Théorème 2.9 (Théorème de Helly [16]). *On considère une famille finie de n ensembles convexes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de R^d (où on suppose que $n \geq d+1$). On suppose que, pour tout choix de $d+1$ convexes parmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ces $d+1$ convexes se rencontrent. Il existe alors un point qui appartient à tous les X_i.*

2.3 Programmation linéaire si la dimension est constante

Le théorème qui suit est attribué à Nimrod Megiddo [11].

Théorème 2.10. *Soit donnée une fonction linéaire*

$$f(x_1, \cdots, x_k) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k \tag{2.11}$$

ainsi que n inéquations

$$\left.\begin{array}{r} a_{10} + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{ik} x_k \geq 0 \\ \cdots \\ a_{n0} + a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nk} x_k \geq 0 \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

Il existe un algorithme qui fonctionne en temps $O(n)$ qui calcule le maximum de la fonction 2.11 en respectant les contraintes 2.12.

Chapitre 3

État de l'art

Dans ce chapitre, nous nous proposons de faire un survol de l'état d'avancement des connaissances en lien avec la problématique de recherche qui a été précisée dans le premier chapitre.

Le problème d'immobilisation est un problème étudié depuis plus de 130 années. La première définition de la notion d'immobilisation (def. 3.1) d'un objet à l'aide des points d'obstacle mis sur le bord d'objet a été formulée par Franz Reuleaux [17] en 1876.

Soit un objet dans l'espace physique modélisé R^n, ou $n \in \{2, 3\}$. Un objet est un sous-ensemble compact et fermé inclus en R^n. Les seules transformations permisses sur l'objet sont des mouvements rigides. Dans l'espace physique il y a des obstacles qui restreignent l'ensemble de mouvements permisses pour l'objet.

Tout au long de ce travail, une figure sera modélisée par un polygone $P = [P_1 P_2 P_3 ... P_m] \subset$

$\mathcal{E}$, et l'ensemble de points d'obstacle, où on a droit des placer les doigts d'un robot, sera modélisé par un ensemble O fini de points fixés,

$$O = \{O_i \mid O_i \in \mathcal{E} \cap Bord(P), i = 1, ..., n\}.$$

Définition 3.1. *On dit que l'ensemble de points d'obstacle O constitue une* fermeture de forme *pour le polygone P si O empêche tous les mouvements du polygone P.*

Mason [10] a proposé une méthode d'analyse graphique pour vérifier si l'ensemble O met le polygone P dans la fermeture de forme. Cette méthode est basée sur deux observations simples. La première observation statue que pour touts les mouvements qui ne sont pas des translations il existe un point ayant une vitesse nulle à chaque instant (voir Figure 3.1). Ce point est appelé centre instantané de rotation (CIR).

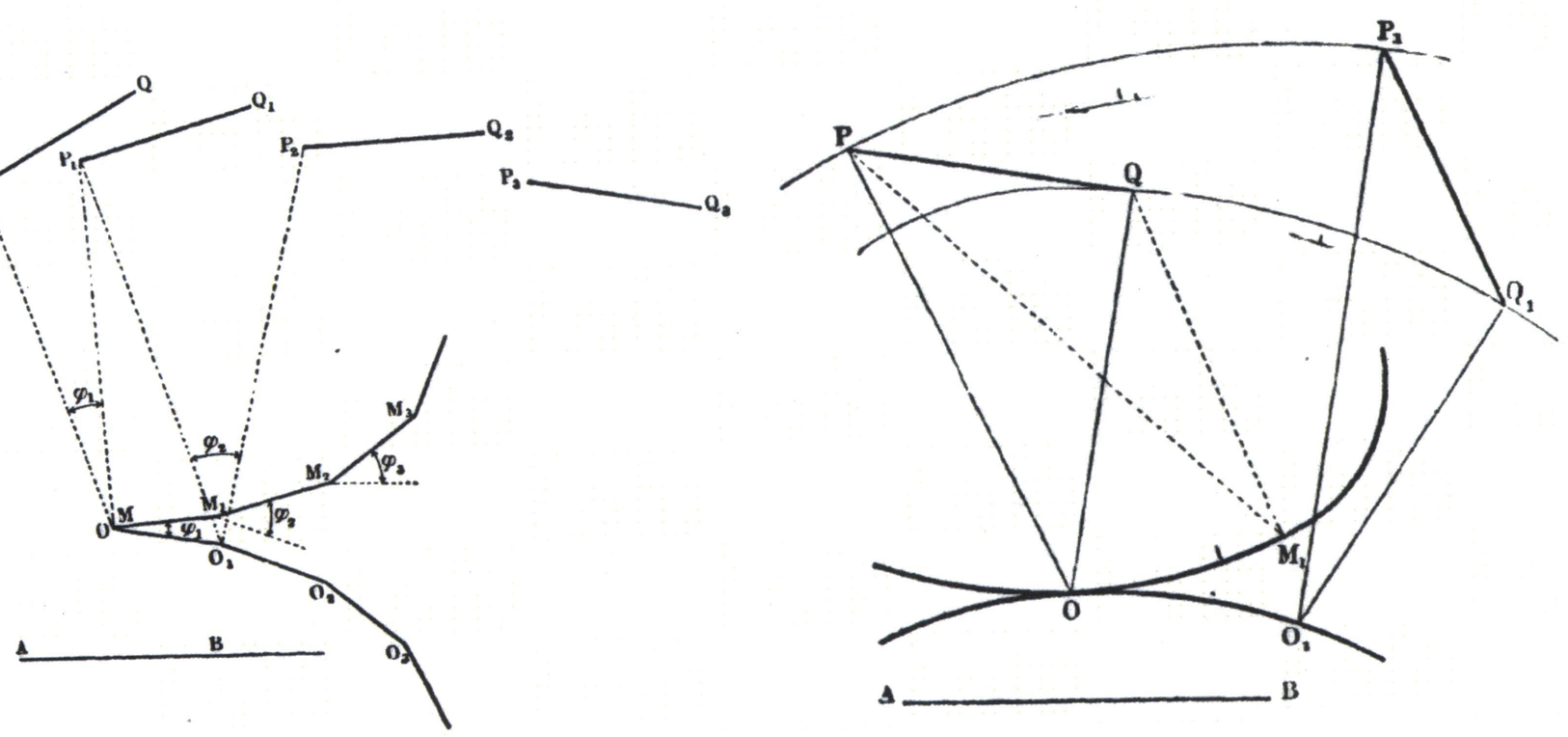


FIGURE 3.1 – Centre instantané de rotation

Cette observation permet de voir chaque mouvement comme une rotation autour de CIR.

La deuxième observation est que pour un point d'obstacle mis à l'intérieur d'un côté du polygone P, on peut diviser le plan en deux demi-plans ouverts et une droite tel que pour tous les points du même demi-plan, les rotations dans le même sens sont possible. Soit O_i un point d'obstacle mis sur un côté du polygone. On dénote par $l(O_i)$ la droite normale au bord et orienté vers l'intérieur du polygone. Si on suppose que la droite $l(O_i)$ est orientée vers le haut (voir Figure 3.2) alors autour de chaque point situé dans le demi-plan gauche les rotations dans le sens trigonométrique direct (ou sens anti-horaire) sont possibles parce qu'après une petite rotation le point O_i s'éloigne de polygone. Par contre, les rotations dans le sens trigonométrique rétrograde, ou sens horaire, ne sont pas possibles parce qu'elles sont empêchées par le point O_i.

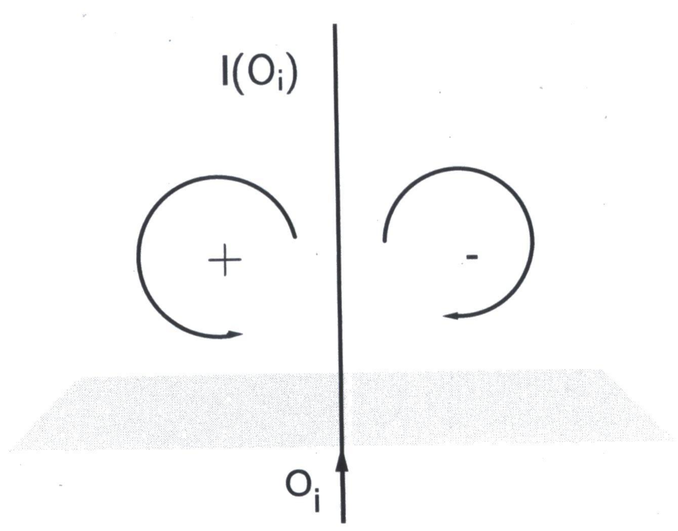


FIGURE 3.2 – Les effects d'un point d'obstacle mis a l'intérieur d'un côté

On appelle rotation positive une rotation du polygone en sens trigonométrique

direct. Une rotation négative sera une rotation du polygone en sens horaire. Suivant le même raisonnement, autour de chaque point situé dans le demi-plan droit les rotations négatives sont possibles et les rotations positives ne sont pas possibles. Autour de chaque point appartenant à $l(O_i)$ sont possibles les deux types de rotations.

L'idée de base pour la méthode d'analyse graphique pour vérifier si un ensemble de points est une fermeture de forme pour le polygone P, consiste à vérifier si après la division du plan pour chaque point d'obstacle O_i il reste encore des régions où les rotations sont possibles. Par exemple, voir Figure 3.3, pour les points O_1 et O_2, on a obtenu 4 régions. Dans les régions II et IV aucune rotation n'est possible tandis que dans la région I sont possibles seulement les rotations négatives et dans la région III les seules rotations possibles sont les rotations positives.

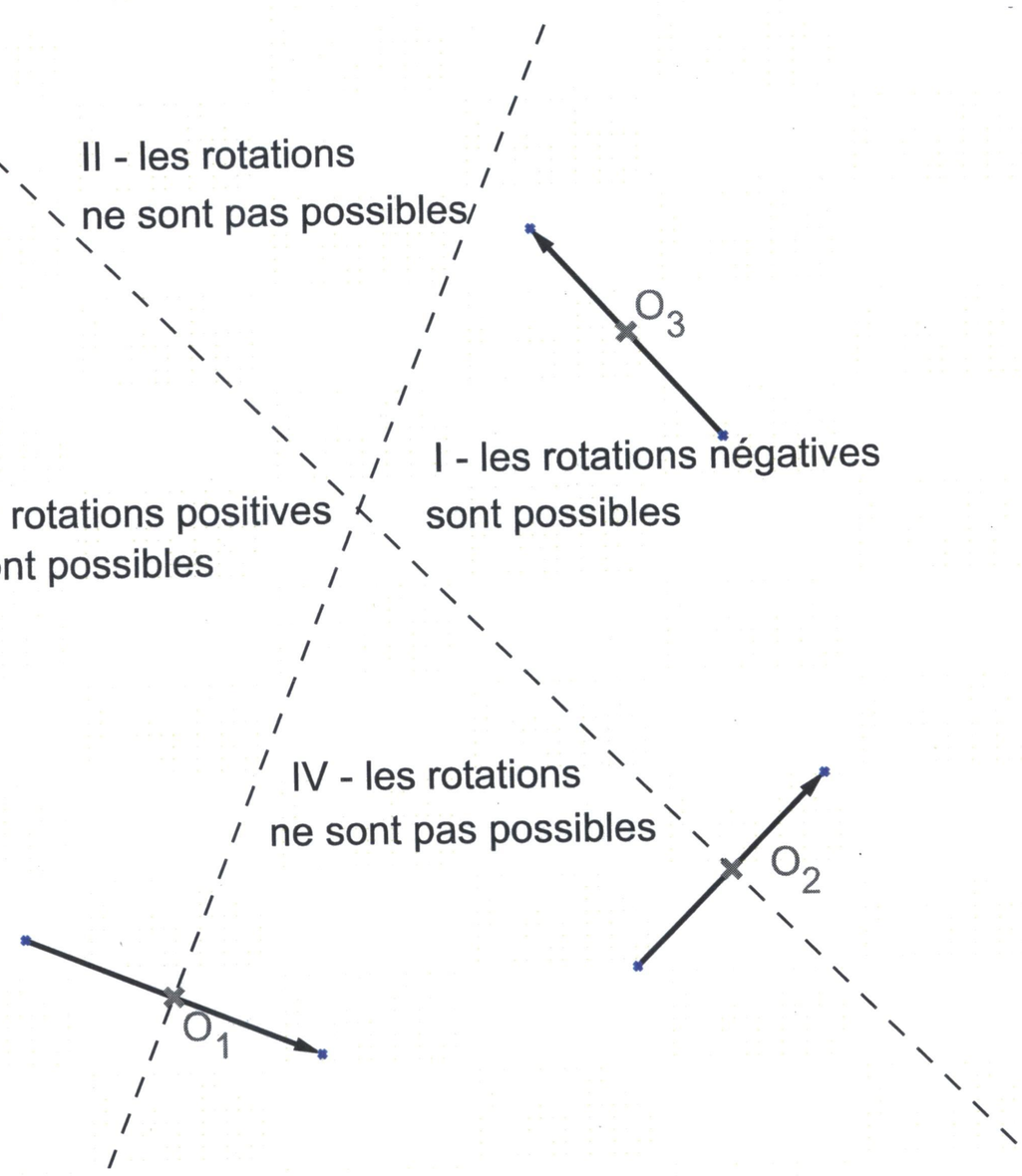


FIGURE 3.3 – Vérification de la fermeture de forme - La méthode d'analyse graphique

Reuleaux [17] a prouvé que pour assurer la fermeture de forme dans un espace bidimensionnel, l'ensemble de points d'obstacle O doit contenir au moins 4 points. En 1990, Markenscoff et al. [9] ont prouvé que pour tous les figures planaires ayant le bord lisse, sauf des cercles, 4 points d'obstacle sont suffisantes pour assurer la fermeture de forme.

Les travaux de Mishra et al. (1987, [12]) et Nguyen [13] ont remplacé la notion de *la fermeture de forme* (définition 3.1) par le concept de *la fermeture de force* (définition 3.2). Ils ont supposé que chaque doigt du robot :

— peut être positionné avec la précision désirée sur la surface d'un objet ;

— peut exercer une force sur objet et la direction de la force sera perpendiculaire sur la surface de l'objet et la direction sera orientée vers l'intérieur de l'objet ;

— la force de frottement entre le doigt et l'objet est $\vec{0}$.

Dans notre cas, l'objet modélisé par P et les doigts du robot par O, on note $\vec{F}_i$ la force exercée par le doigt O_i su P.

Définition 3.2. *On dit que l'ensemble de points d'obstacle O constitue une* fermeture de force *[12] pour le polygone P si pour n'importe quelle force $\vec{F}$ ou torsion $\vec{M}$ externe appliquée sur P les doigts peuvent exercer certaines forces tel que P reste en équilibre (voir Figure 3.4), c'est à dire la somme des forces et la somme des moments est $\vec{0}$:*

$$\vec{F} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M} + \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

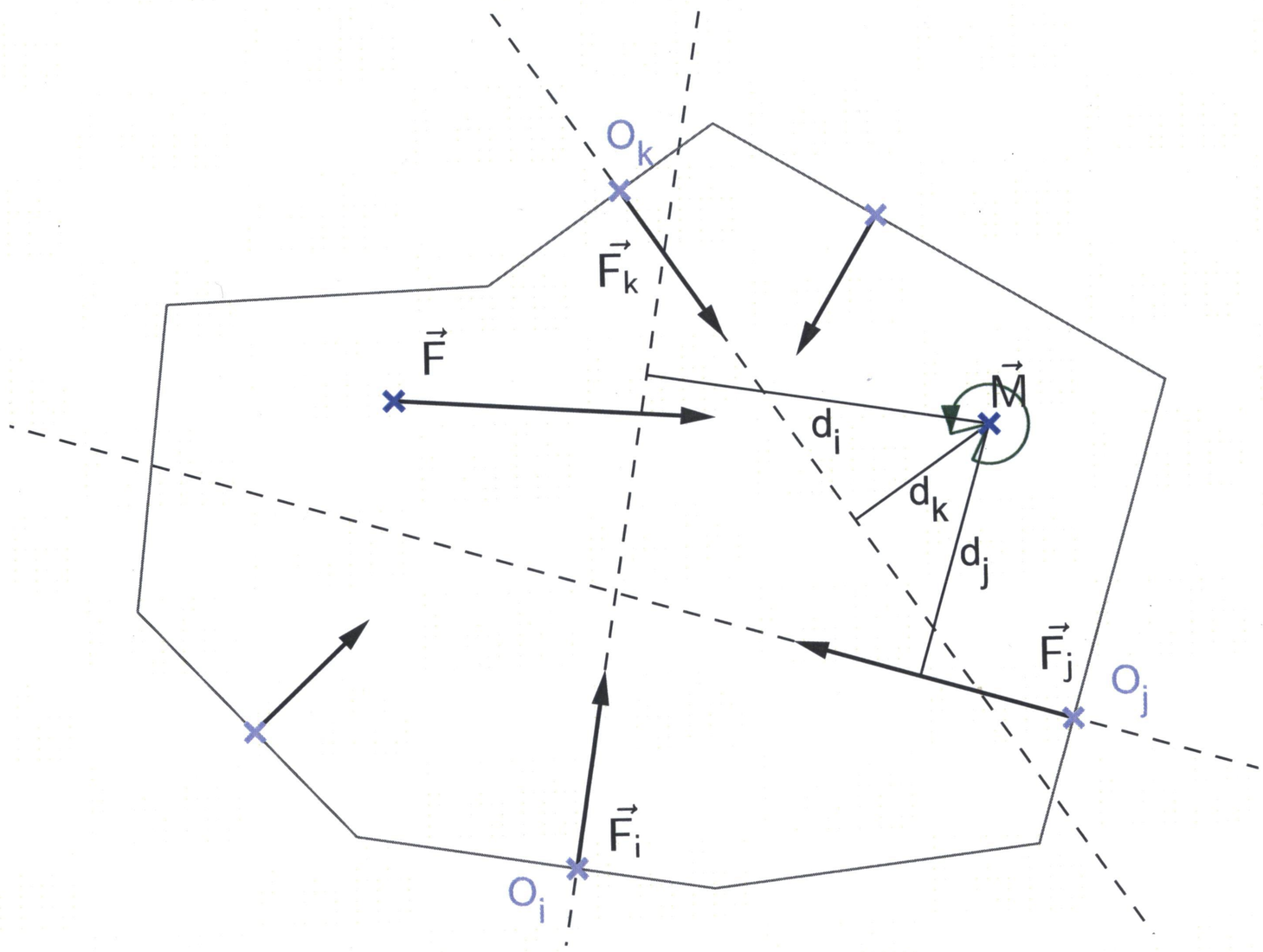


FIGURE 3.4 – La fermeture de force

Dans les années '90, Wlodzimierz Kuperberg [6] a formulé quelques nouveaux problèmes sur l'immobilisation et il a fourni aussi une nouvelle définition, plus simple, pour l'immobilisation (définition 3.3). Une partie de ces problèmes et la nouvelle définition ont été reporté par Joseph O'Rourke en 1990 [14].

Définition 3.3. *Une figure P est* immobilisée *par un ensemble de points d'obstacle O si n'importe quel mouvement rigide de la figure force au moins un point à pénétrer à l'intérieur de la figure.*

En utilisant cette nouvelle définition, Czyzowicz et al [2, 3] ont prouvé que, dans

un plan, à l'aide de 3 points on peut immobiliser une figure qui n'a ni la forme d'une tube ni la forme d'une cercle. On ne peut pas immobiliser un cercle parce que la rotation autour de son centre reste toujours possible. Pour une figure en forme d'une tube, on trouve un ensemble de 4 points d'obstacle qui l'immobilise.

Rimon et Burdick [18] ont analysé les différentes notions d'immobilisation rencontrées dans la revue de littérature et ils ont prouvé que les notions de la fermeture de forme et de la fermeture de force sont équivalentes et ils ont appelé ce type d'immobilisation comme *immobilisation de première ordre.*

Par contre, Rimon et Burdick [18] ont nommé le type d'immobilisation fourni par la définition 3.3 comme *immobilisation de deuxième ordre.* Au cours de cet travail, par immobilisation on comprend immobilisation de deuxième ordre. Les conditions qui doivent être satisfaites par un ensemble de points d'obstacle pour assurer l'immobilisation de première ordre pour une figure P, sont conditions suffisantes mais pas nécessaires.

Théorème 3.1. Les conditions nécessaires et suffisantes pour immobiliser un polygone P [2]. *Un polygone P est immobilisé par trois points O_1, O_2 et O_3 mis sur trois côtés distincts de P, si et seulement si :*

- *les trois droites orthogonales en O_1, O_2 et O_3 sur c_1, c_2, c_3 passent par un point commun ainsi que*
- *l'intersection des trois demi-plans intérieurs engendrés par c_1, c_2, c_3 est bornée et non-vide, c'est-à-dire qu'ils forment un triangle.*

Une ensemble de trois points d'obstacle qui satisfait les conditions du théorème 3.1 immobilise le polygone P mais ne le met pas dans la fermeture de force (voir Figure 3.5).

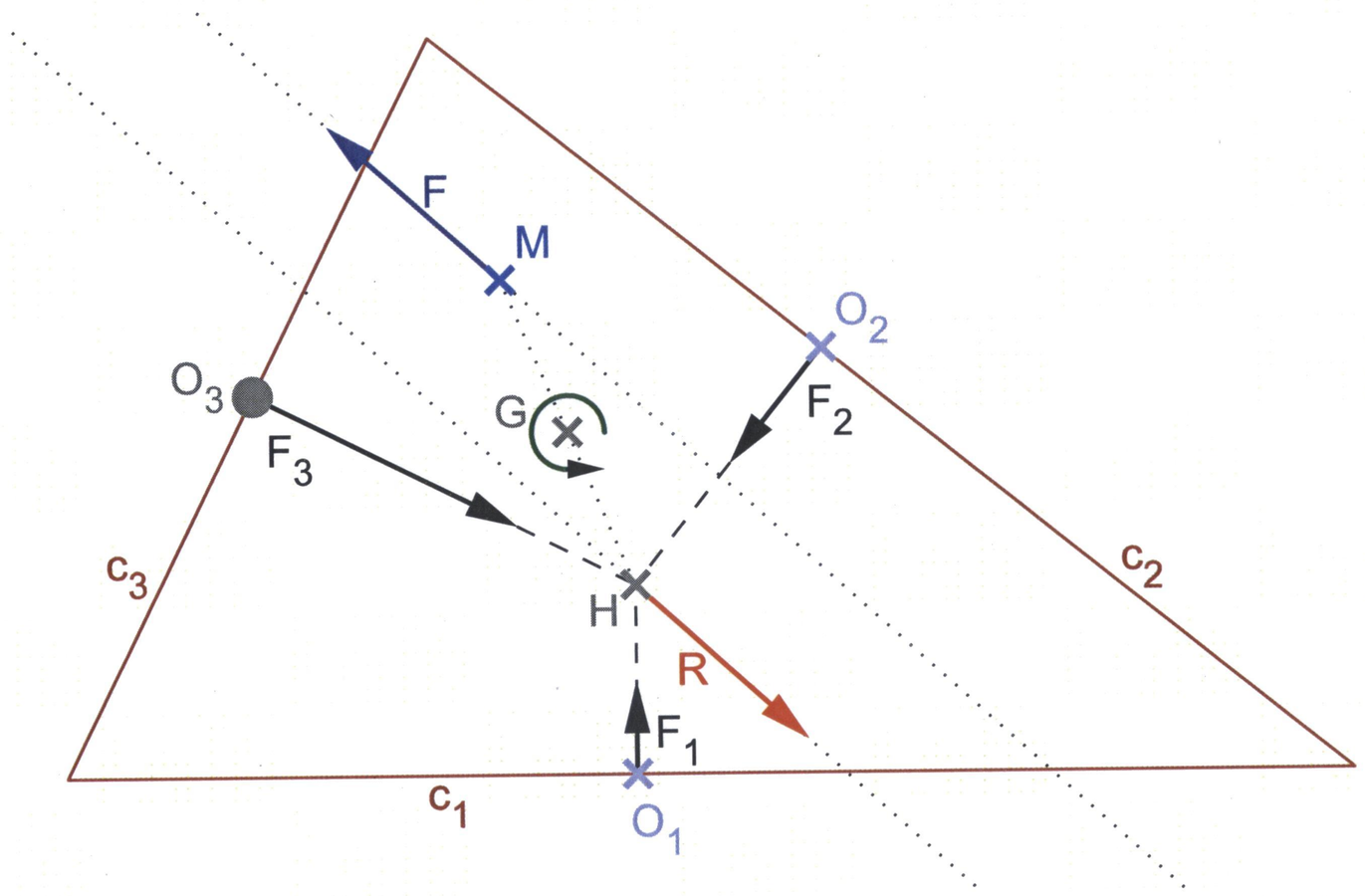


FIGURE 3.5 – Un triangle immobilisé qui n'est pas dans la fermeture de force

Soit P un triangle immobilisé par trois points d'obstacle O_1, O_2 et O_3, conforme au théorème 3.1 (fig. 3.5). On dénote par H le point d'intersection des trois droites orthogonales en O_1, O_2 et O_3 sur c_1, c_2, c_3, respectivement. Sur le polygone P dans un point $M \neq H$ on exerce une force $\vec{F} \neq \vec{0}$ tel que la direction de force $\vec{F}$ ne passe pas par le point H. On note $\vec{R}$ la somme de forces $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$. Puisque

$$\vec{F} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$$

$$\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

la direction du $\vec{R}$ et la direction du $\vec{F}$ sont parallèles. La somme de deux vecteurs parallèles ayant les sens opposés est $\vec{0}$ mais il n'est pas possible d'obtenir la somme de moments égale à $\vec{0}$.

Une partie de notre recherche se réfère à un mouvement rigide d'un objet planaire dont deux points sont restreints à bouger sur deux segments de droites. Pour le cas de segments de droite perpendiculaires ce concept est connu depuis longtemps et il a été utilisé dans la construction du *compas à ellipse* d'Archimède. Le version oblique du compas à été connue au moins à del Monte [5] en 1579. Taimina [19] remarque, sans citer les sources historiques, que le compas oblique à été connu par Leonardo da Vinci (1452-1519). Le preuve formelle de l'exactitude du compas oblique à été donnée par Schooten [20] et récemment reprise par Wetzel [21].

Une approche topologique sur immobilisation a été abordé par Pokorny et autres (voir [15]). Leur travail s'occupe de l'identification des régions d'un objet où il peut être saisi. Pour cela ils cherchent les trous dans le polygone.

Jeffrey Mahler et autres ont étudié et fourni un algorithme pour saisir un objet dont la surface n'est pas connu avec une bonne précision [8].

Peter K. Allen, [4], en utilisant l'information fournie par les senseurs placés aux doigts d'un robot qui saisi un objet, essaye de trouver un meilleure position des doigts pour achever une saisie stable d'objet.

Chapitre 4

Mouvements planaires

4.1 Mouvement d'un point

Pour définir le mouvement d'un point sur le plan, on donne une description paramétrique de la courbe de sa trajectoire.

Définition 4.1. *Soit un intervalle de nombres réels* $I = [t_0, t_1]$ *et* $\mathcal{E}$ *le plan réel* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Le* mouvement *d'un point* M *sur le plan est décrit par une fonction continue*

$$f : I \to \mathcal{E},\ t \mapsto (x_M(t), y_M(t)),$$

L'intervalle $I = [t_0, t_1]$ est souvent interprété comme l'intervalle de temps du mouvement et $(x_M(t), y_M(t))$ sont les coordonnées du point au moment t.

L'ensemble des points

$$\{(x, y) \mid \exists t \in [t_0, t_1] \text{ tel que } (x, y) = (x_M(t), y_M(t))\}$$

est la *trajectoire* du point M (voir Figure 4.1).

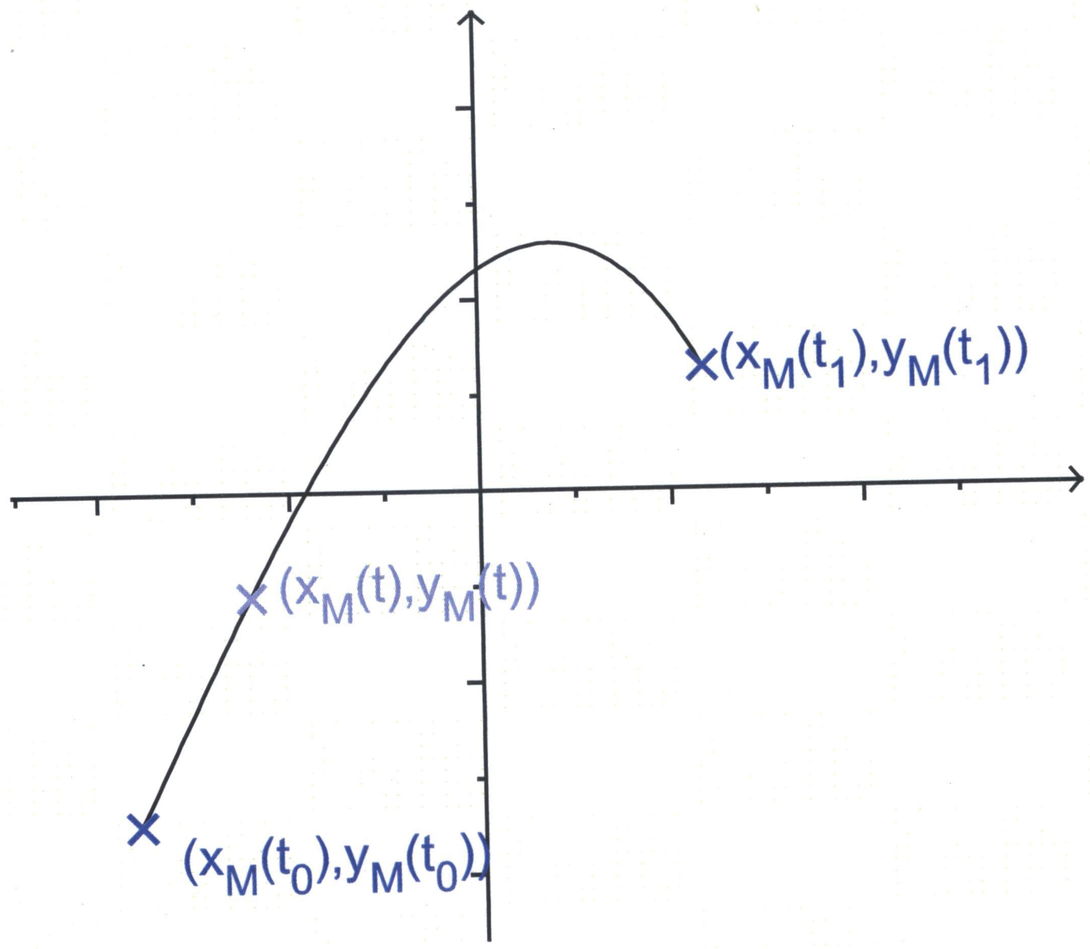


FIGURE 4.1 – Mouvement d'un point

Dans ce travail, nous ne sommes pas intéressés aux paramètres cinématiques du mouvement comme la vitesse où l'accélération. En conséquence, nous ne faisons pas de distinction entre deux mouvements f_1 et f_2 qui ont la même trajectoire. Plus précisément, pour nous, deux mouvements f_1 et f_2 sont équivalents s'il y a un fonction $g : [t_0, t_1] \to [t_0, t_1]$, g continue et bijective, $g(t_0) = t_0$, $g(t_1) = t_1$ et pour

$\forall t \in [t_0, t_1],\ f_1(t) = f_2(g(t))$.

4.2 Mouvement rigide d'une figure

Soit une figure $\mathcal{F}$. Le mouvement de la figure $\mathcal{F}$ est défini par la position de chaque point $M \in \mathcal{F}$ à tout instant, c'est à dire que, pour chaque point M, on doit connaître la courbe paramétrée $f_M : I \to \mathcal{E}$.

Définition 4.2. *Par* le mouvement rigide *de la figure $\mathcal{F}$, on comprend l'ensemble des mouvements des points de la figure, défini sur le même intervalle de temps $[t_0, t_1]$, tel que $f_{(\mathcal{F})}(t)$ - l'image de la figure au moment t est une isométrie positive de $f_{(\mathcal{F})}(t_0)$ - l'image de la figure au moment t_0. Plus formellement, deux conditions doivent être vérifiées :*

- $\forall A, B \in \mathcal{F}, \forall t' \in [t_0, t_1]$ *on a* $|AB| = |f_A(t')f_B(t')|$
- $\forall A, B, C \in \mathcal{F}, \forall t' \in [t_0, t_1]$ *on a* $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \measuredangle(\overrightarrow{f_A(t')f_B(t')}, \overrightarrow{f_A(t')f_C(t')})$

En d'autres mots, un mouvement rigide est un mouvement qui, tout au long du mouvement, préserve les distances, les angles et l'orientation. Si la figure $\mathcal{F}$ est implicitement connue, pour simplicité, $f_{\mathcal{F}}$ sera dénotée par f et l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ occupés par la figure au moment t sera donné par

$$f(t) = \{P' \in \mathcal{E} \mid \exists P \in \mathcal{F} \text{ tel que } P' = f_P(t)\} \tag{4.1}$$

Soit M, N deux points distincts appartenant à la figure $\mathcal{F}$ et f un mouvement rigide de $\mathcal{F}$. Le fait que f est un mouvement rigide de $\mathcal{F}$ impose quelques contraintes sur les courbes paramétrées f_M et f_N. Pour f_M la seule restriction est la condition de continuité. Pour le point N, en plus de continuité, on a la condition de préservation de distances. Ça signifie que, si on note par d_{MN} la distance $|M, N|$, alors, $\forall t \in [t_0, t_1]$ on a $d_{MN} = |f_M(t)f_N(t)|$. C'est à dire que, au tout moment du temps t, le point $f_N(t)$ est positionné sur le cercle de centre $f_M(t)$ et de rayon d_{MN}.

Si on dénote par $\alpha(t)$ la mesure de l'angle orienté $\measuredangle(\vec{i}, \overrightarrow{f_M(t)f_N(t)})$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire $\overrightarrow{(0,1)}$, $\alpha(t) : I \to [0, 2\pi[$, alors le *mouvement* du point N sur le plan est décrit par la fonction suivante :

$$f_N : I \to \mathcal{E},\ t \mapsto (x_M(t) + d_{MN}\cos(\alpha(t)), y_M(t) + d_{MN}\sin(\alpha(t))).$$

La fonction $\alpha(t)$ est une fonction continue. La condition de continuité pour la fonction α est une condition obligatoire pour s'assurer que la fonction f_N est une fonction continue.

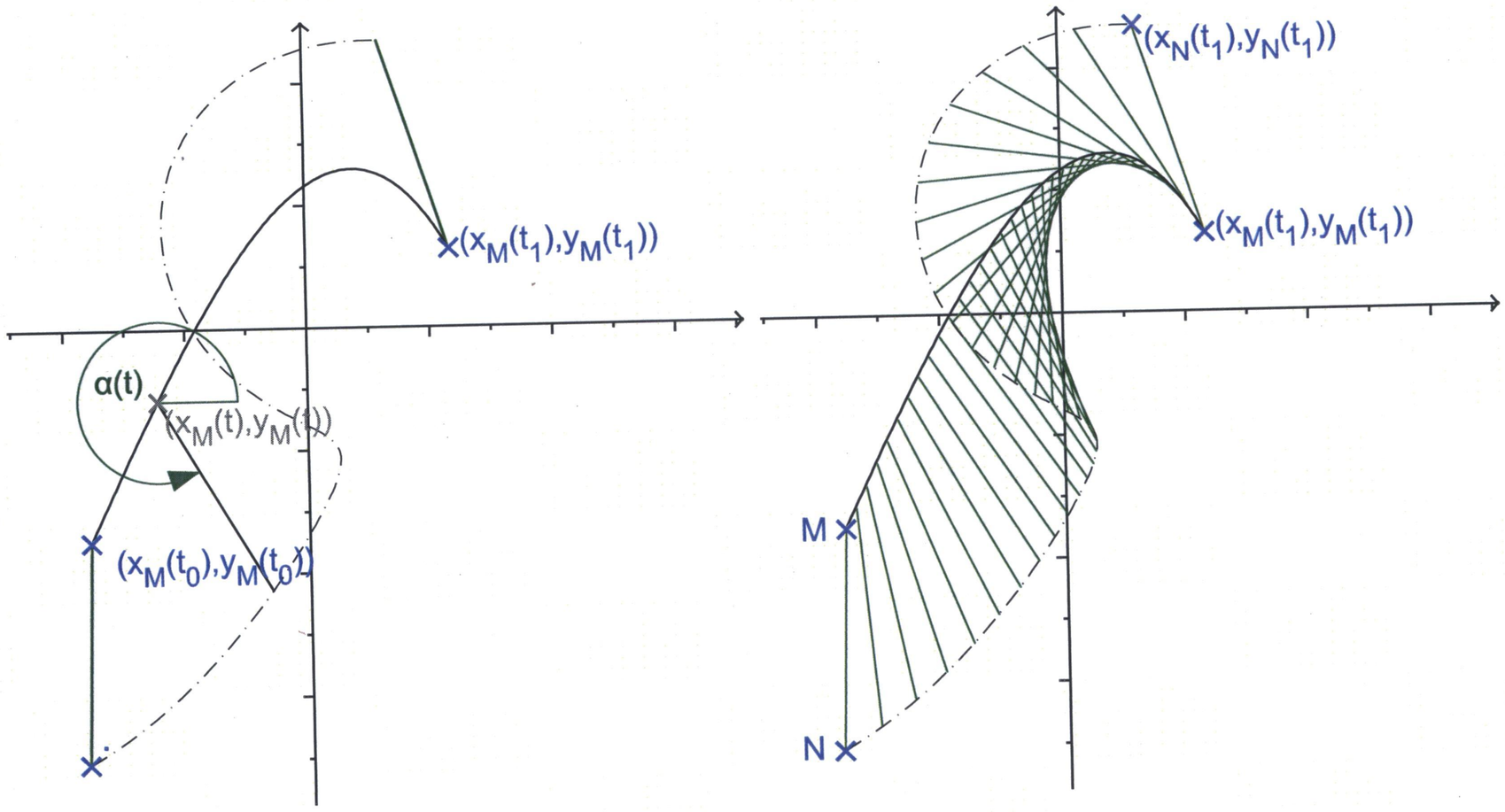


FIGURE 4.2 – Mouvement d'un segment

Le mouvement du segment $[MN]$ (voir Figure 4.2) est bien défini par les fonctions f_N et α. La fonction α est le même pour $\forall Q \in [MN]$, la distance d_{MQ} est connue donc on a aussi la fonction f_Q en décrivant le mouvement du point Q.

Proposition 4.1. *Soit $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ deux points donnés de la figure $\mathcal{F}$. Les mouvements des points M et N déterminent le mouvement entier de la figure $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soit $f_M : I = [t_0, t_1] \to \mathcal{E}$ le mouvement du point M et $f_N : I \to \mathcal{E}$ le mouvement du point N. Chaque valeur de t détermine les deux points $f_M(t)$ et $f_N(t)$. Il faut prouver que, pour n'importe quel point $Q \in \mathcal{F}$, on peut déterminer la position du point Q à n'importe quel moment $t \in [t_0, t_1]$ (voir Figure 4.3).

Le déplacement de la figure $\mathcal{F}$ qui transforme le point M en f_M et le point N en f_N peut être décomposé en une translation de vecteur $\overrightarrow{Mf_M}$ suivie d'une rotation autour du point f_M, rotation d'angle $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f_M f_N})$.

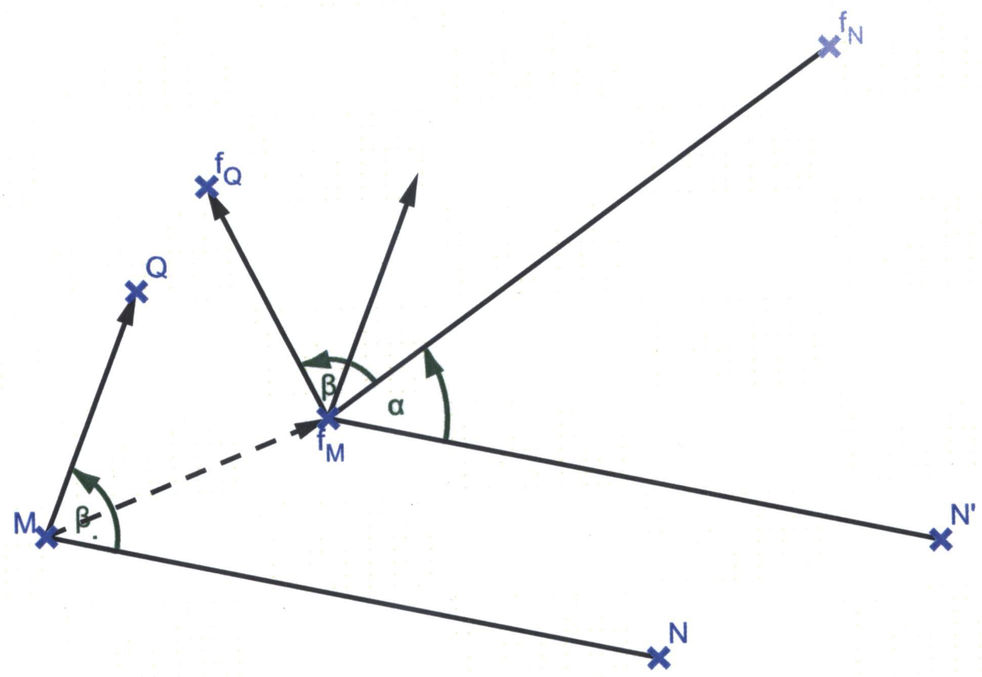


FIGURE 4.3 – Déterminer la position du point Q au moment $t \in [t_0, t_1]$

Soit $f : I = [t_0, t_1] \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$ la fonction qui décrit le mouvement de la figure $\mathcal{F}$, $f_M : I \to \mathcal{E}$, $t \mapsto (x_M(t), y_M(t))$ le mouvement du point M et $f_N : I \to \mathcal{E}$, $t \mapsto (x_N(t), y_N(t))$ le mouvement du point N. Puisque $\forall t' \in I$, $f(t')$ est l'image du $\mathcal{F}$ par un déplacement, nous avons

$$|f_M(t') - f_N(t')| = |f_M(t_0) - f_N(t_0)|.$$

On va définir la fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \measuredangle(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f_M(t)f_N(t)}).$$

Puisque $f_M(t)$ $et f_N(t)$ sont des fonctions continues, alors, la fonction $\alpha(t)$ est aussi une fonction continue.

Alors, pour n'importe quel point Q de la figure, le mouvement du point Q sera

$$f_Q : I \to \mathcal{E},\ f_Q(t) = f_M(t) + Rot(\overrightarrow{MQ}, \alpha), \tag{4.2}$$

où par $Rot(\overrightarrow{MQ}, \alpha)$ *nous avons noté la rotation du vecteur* $\overrightarrow{MQ}$ *par un angle* α. Le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ est interprété comme un vecteur libre, donc il n'est pas nécessaire de spécifier le point autour duquel on fait la rotation. □

On peut conclure que, pour $\forall Q \in \mathcal{F}$, la condition de préservation des angles du mouvement rigide assure que les fonctions f_N est α sont suffisantes pour obtenir la fonction f_Q, qui à la forme suivante (voir Figure 4.4) :

$$f_Q : I \to \mathcal{E},\ t \mapsto (x_M(t) + d_{MQ}\cos(\beta + \alpha(t)), y_M(t) + d_{MQ}\sin(\beta + \alpha(t))).$$

où d_{MQ} est la distance $|M, Q|$ et β est l'angle $\widehat{NMQ}$.

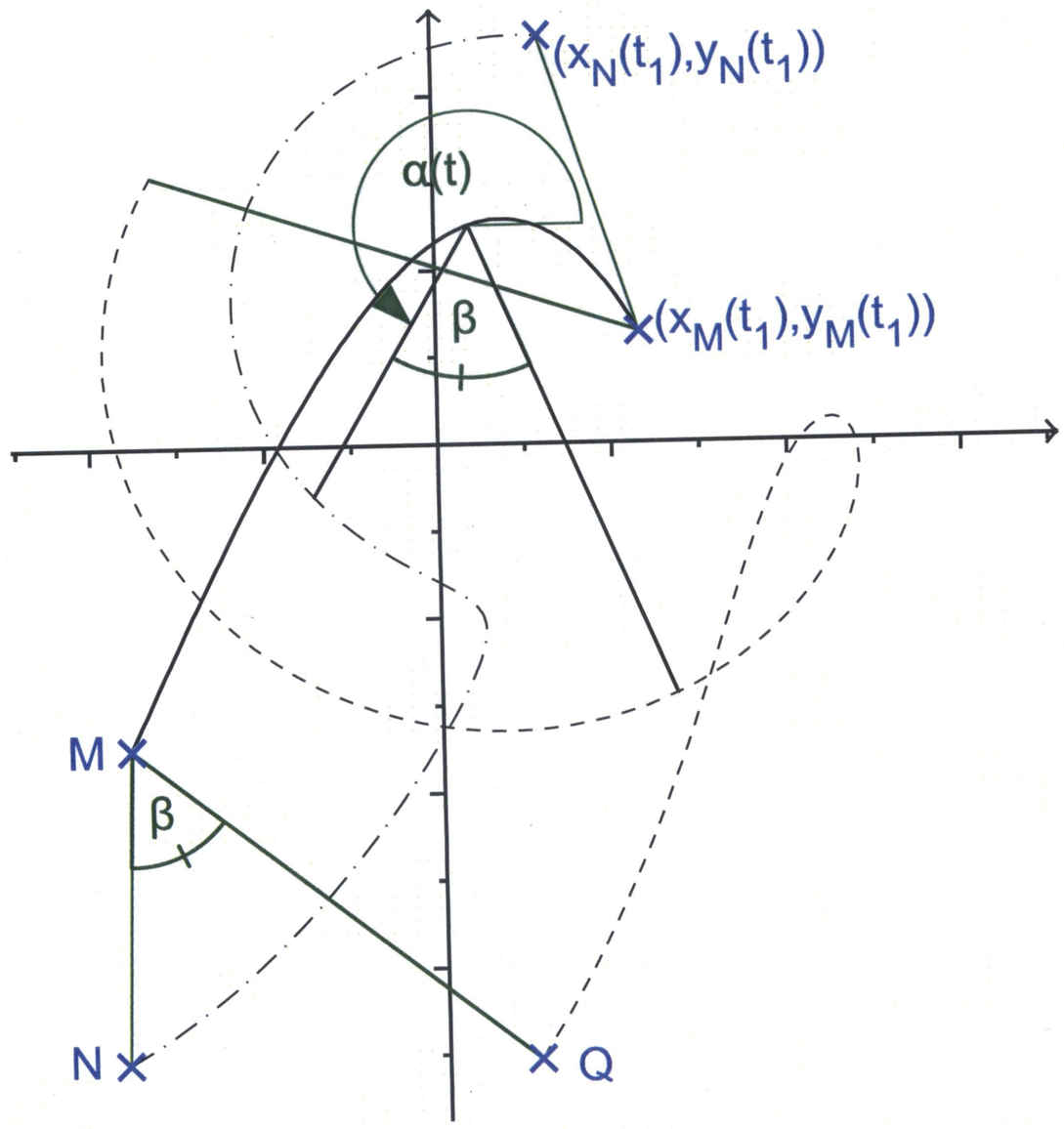


FIGURE 4.4 – Mouvement d'une figure

4.3 Mouvement d'échappement. Immobilisation

Pour vérifier si un polygone P est immobilisé ou non par un ensemble de points O, il faut décider s'il existe un mouvement du polygone P durant lequel aucun point de O ne pénètre l'intérieur de P.

Définition 4.3. *On appelle* mouvement d'échappement du polygone P par rapport à l'ensemble des points O *un mouvement* f *tel que* $\forall t \in [0,1]$, *l'intersection de*

l'ensemble de points O et l'intérieur du polygone P au moment t est vide.

Pour déterminer si un polygone P est immobilisé par l'ensemble des points $\mathcal{O}$, il faut montrer qu'il n'existe aucun mouvement d'échappement du polygone P par rapport à l'ensemble des points $\mathcal{O}$.

4.4 Espace de configurations

Soit P un polygone dans le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On appelle *configuration* la position du polygone dans cet espace. L'ensemble des positions possibles du polygone est appelé *l'espace de configurations*. Une configuration est un point dans cet espace de configurations. Comme un mouvement du polygone est une succession continue de positions dans plan, le mouvement est alors décrit par une courbe continue dans l'espace de configurations.

La notion de « l'espace de configurations » est étroitement liée à la notion de degrés de liberté (DOF). Cette notion a été introduite par Tomás Lozano-Pérez [7], où il a étudié le mouvement d'un robot dans un *espace de travail* (l'espace réel) modélisé par un espace affine euclidien.

Soit P un polygone simple et O_A un point de référence quelconque de polygone P. Le mouvement de P dans l'espace de travail est un mouvement plan sur plan. On note par $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère orthonormé direct pour le plan fixe $\mathcal{P}$ et par $\mathcal{R}_\mathcal{A} = (O_A, \vec{\imath_A}, \vec{\jmath_A})$ le repère orthonormé direct pour le plan mobile. Le mouvement

de P dans plan possède deux degrés de liberté en translation et un troisième en rotation. On peut déplacer P librement sur chacun de ses degrés de liberté.

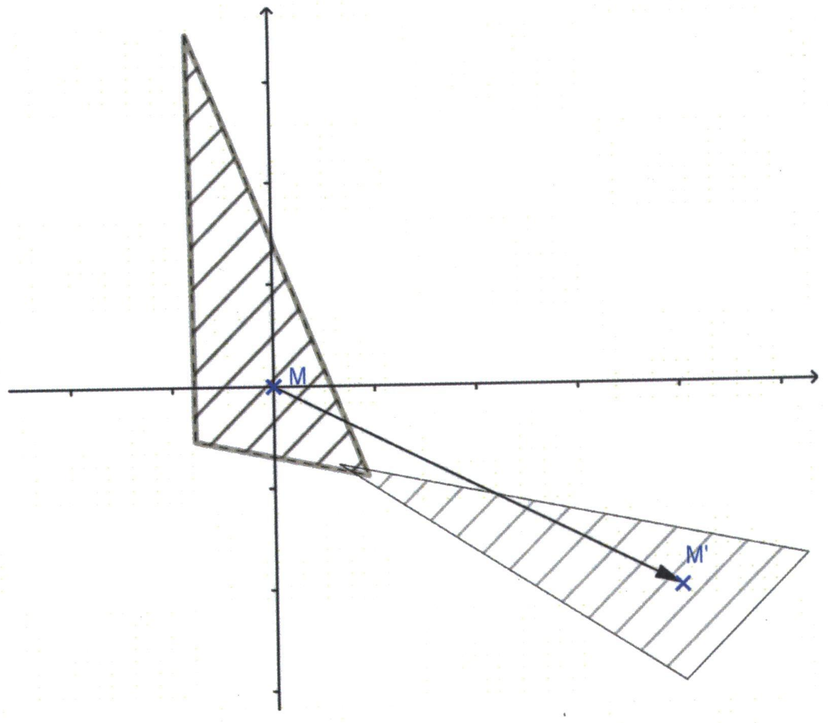
Définition 4.4. *On appelle* la configuration *de polygone P le 3-uplet $q = (x, y, \theta)$, où (x, y) représente la position du O_A par rapport au repère $\mathcal{R}$, et θ représente l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\vec{\imath_A}$.*

Autrement dit, une configuration (x, y, θ) décrit la position et l'orientation du polygone P dans plan.

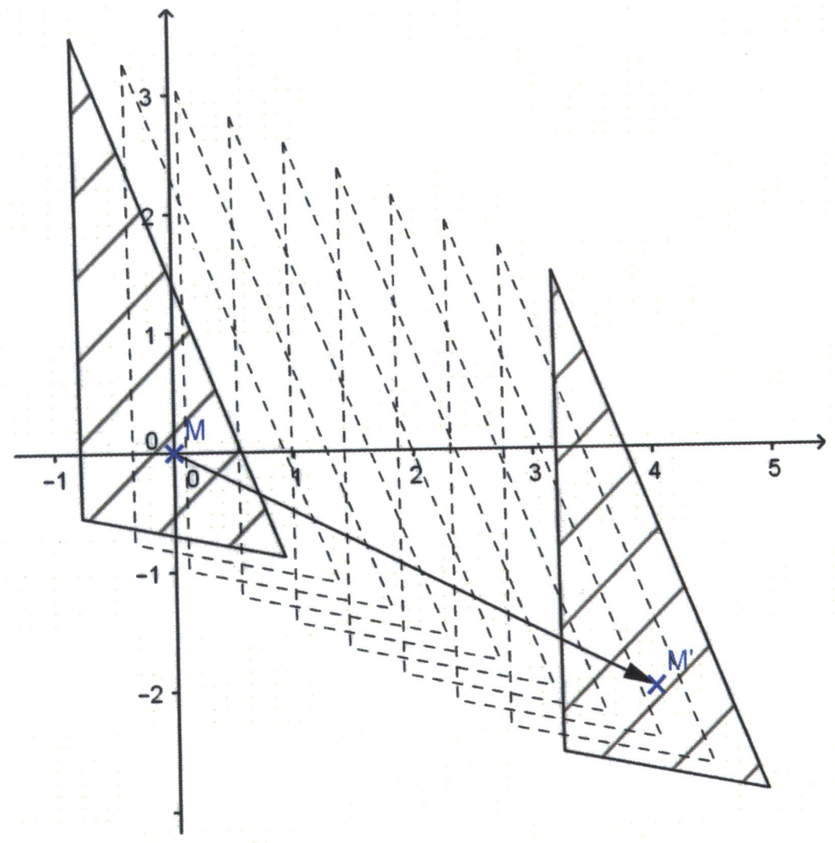
Définition 4.5. *On nomme* l'espace de configurations *du polygone P, et l'on dénote $\mathcal{C}$, l'ensemble de toutes les positions possibles du polygone P.*

Dans l'espace $\mathcal{C}$, le polygone P correspond à un point q. Pour exemplifier la notion de configuration on prend un polygone (voir Figure 4.5(a)), en ce cas un triangle. M est un point de référence du polygone. On considère cette position comme la position initiale du polygone, c'est à dire le point $(0, 0, 0)$ dans l'espace de configurations. Pour une autre position du polygone dans le plan, la nouvelle position est obtenue par une translation du polygone suivant le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, suivi d'une rotation d'angle θ autour du point M'. La nouvelle configuration (x, y, θ) est obtenue à partir du vecteur $(x, y) = \overrightarrow{MM'}$ et de l'angle de rotation θ (voir Figures 4.5(b) et 4.5(c)).

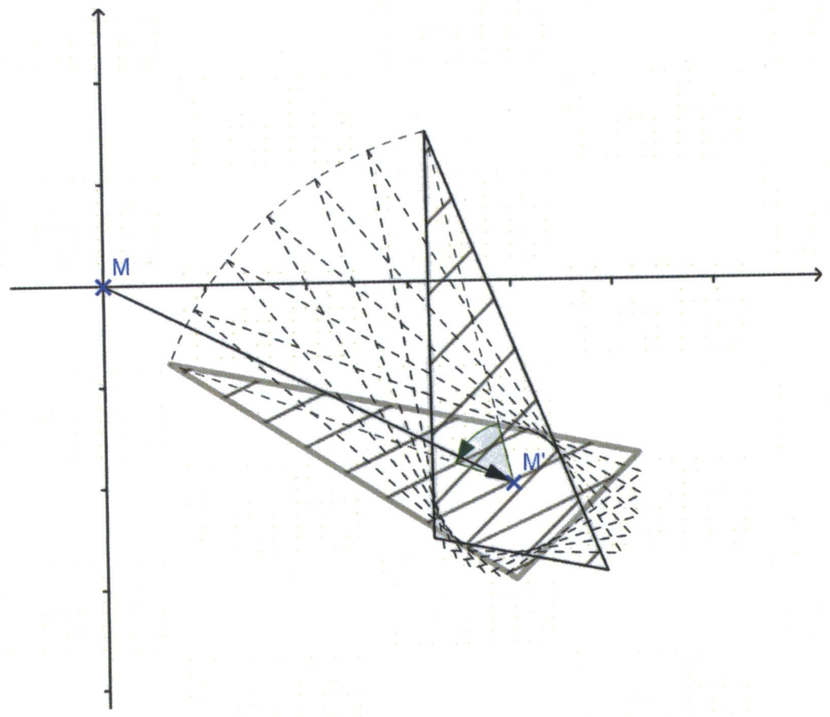
Pour un déplacement du polygone P dans le plan, ce qui nous intéresse est juste la trajectoire et pas des autres paramètres cinématiques ou cinétiques comme, par exemple, vitesse, accélération, force, masse ou énergie cinétique. Dans notre cas, le



(a) La position initiale et finale du polygone



(b) Le polygone est soumis à une translation



(c) suivi d'une rotation autour du point M'

FIGURE 4.5 – Chaque position du polygone sur le plan corresponde à un point dans l'espace de configurations

mouvement est dans l'espace de configuration $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}^3$. En ce cas, un déplacement du P sur le plan $\mathcal{P}$ correspond à une courbe dans $\mathcal{C}$. Si on dénote par X, Y et Θ les axes du $\mathcal{C}$, alors, un segment parallèle au plan XY correspond à une translation du P. Un segment parallèle à l'axe Θ correspond à une rotation de P autour de son point de référence.

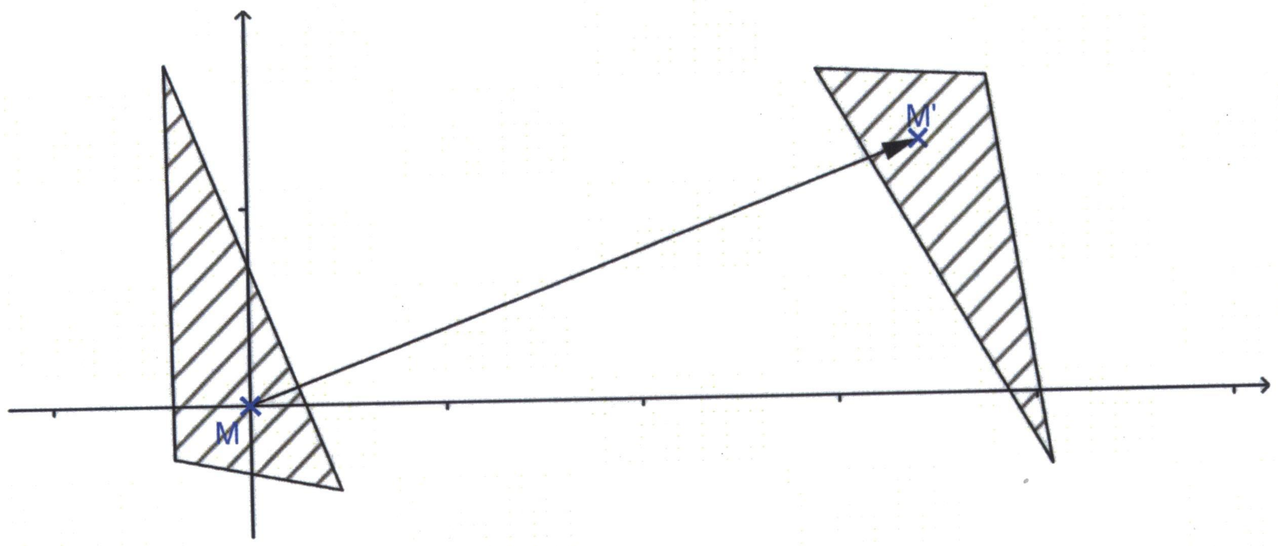
Un déplacement du polygone de la position initiale $M = (0, 0, 0)$ à une position $S = (x, y, \theta)$ corresponde dans l'espace de configurations à une courbe continue de M à S (voir Figure 4.6). Également, toute courbe continue de M à S corresponde à un mouvement. La translation suivi d'une rotation est un cas particulier de déplacement.

Définition 4.6. *Pour une configuration* $q \in \mathcal{C}$, $q = (x, y, \theta)$, l'emplacement *de* P *dans* $\mathcal{P}$, *dénoté par* $P(q)$, *est défini comme le sous-ensemble de points de* $\mathcal{P}$ *occupés par* P *quand* $O_A = (x, y)$ *et* $\angle(\vec{i}, \vec{i_A}) = \theta$.

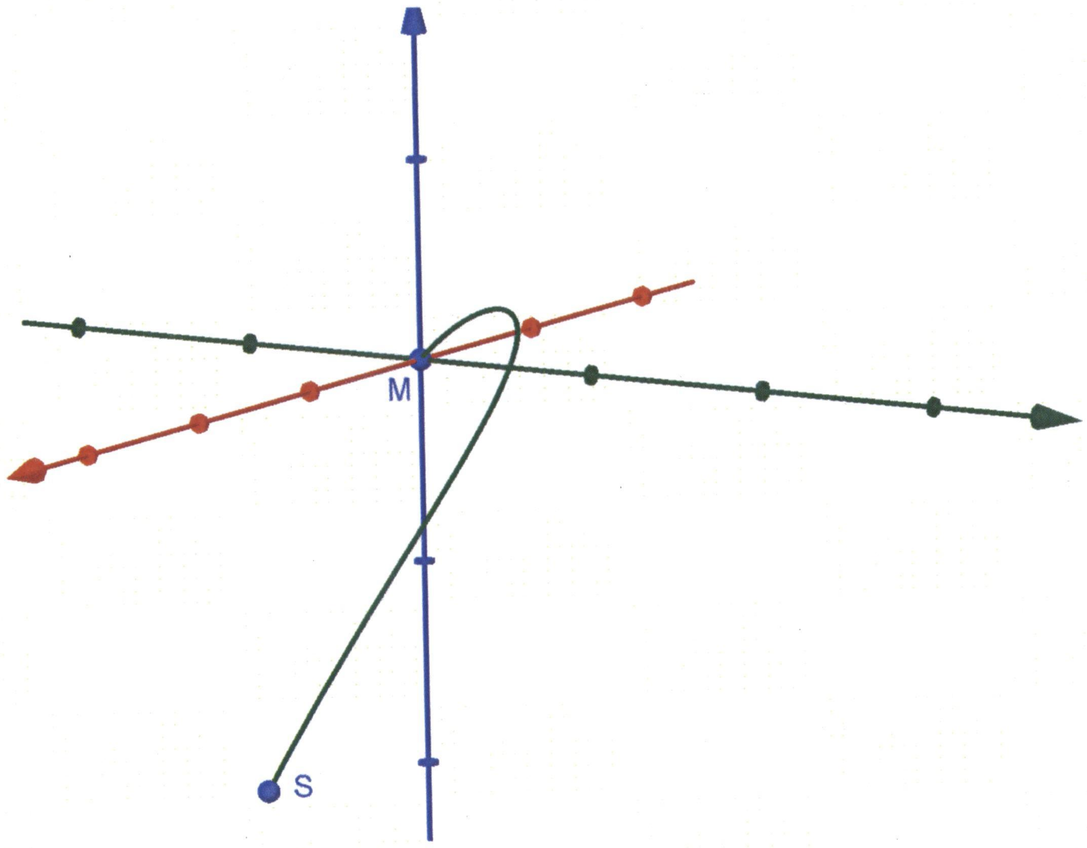
Au long de ce travail, on va vérifier si tous les mouvements de P sont bloqués par des points appartenant à un ensemble donné, dénoté par $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ est un ensemble fini contenu dans le plan fixe, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$.

Définition 4.7. *On nomme* point d'obstacle *un point* $O_i \in \mathcal{O}$.

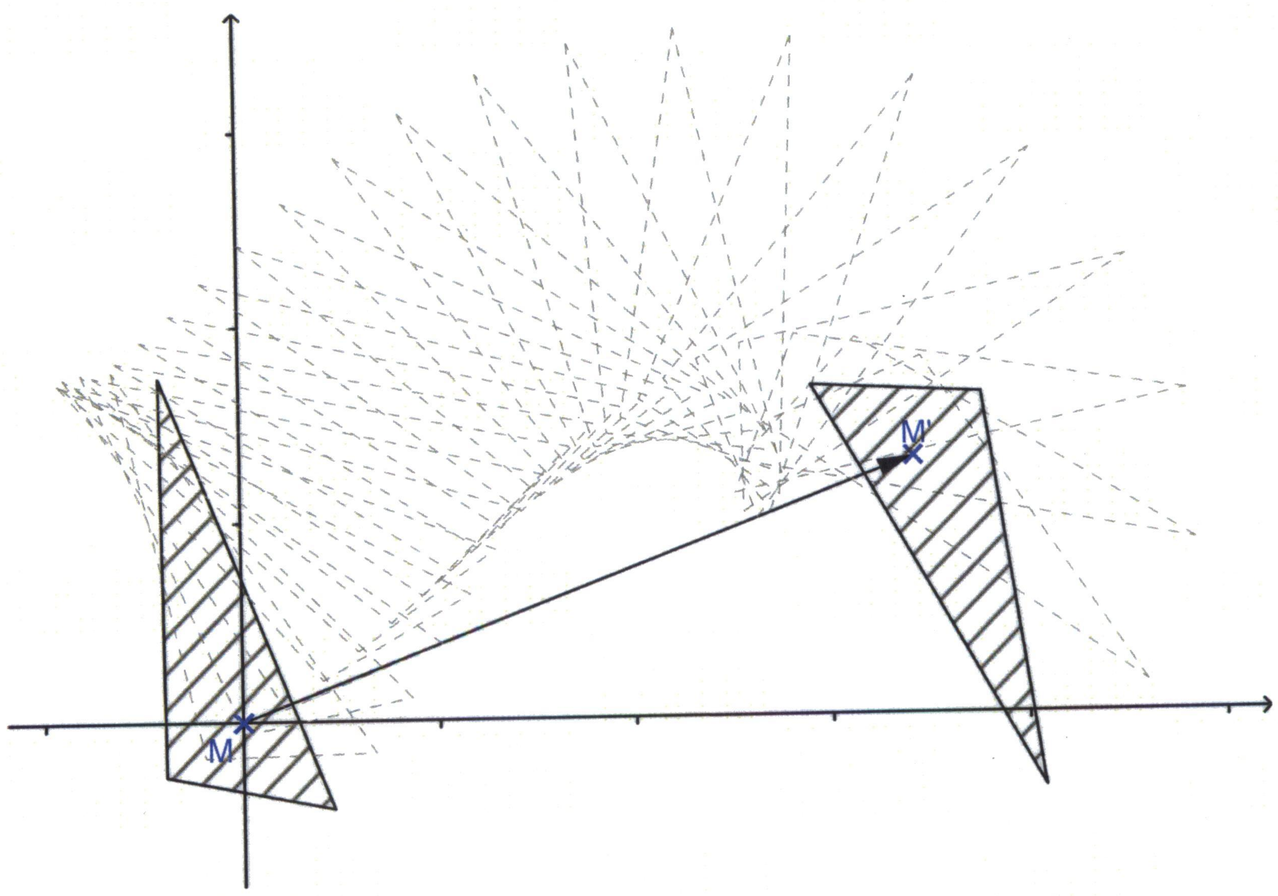
Définition 4.8. *On nomme* configuration interdite *ou illégale, une configuration* $q \in \mathcal{C}$ *tel que* $\text{int}(P(q)) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ *(voir Figures 4.7 et 4.8).*



(a) La position initiale et finale d'un polygone

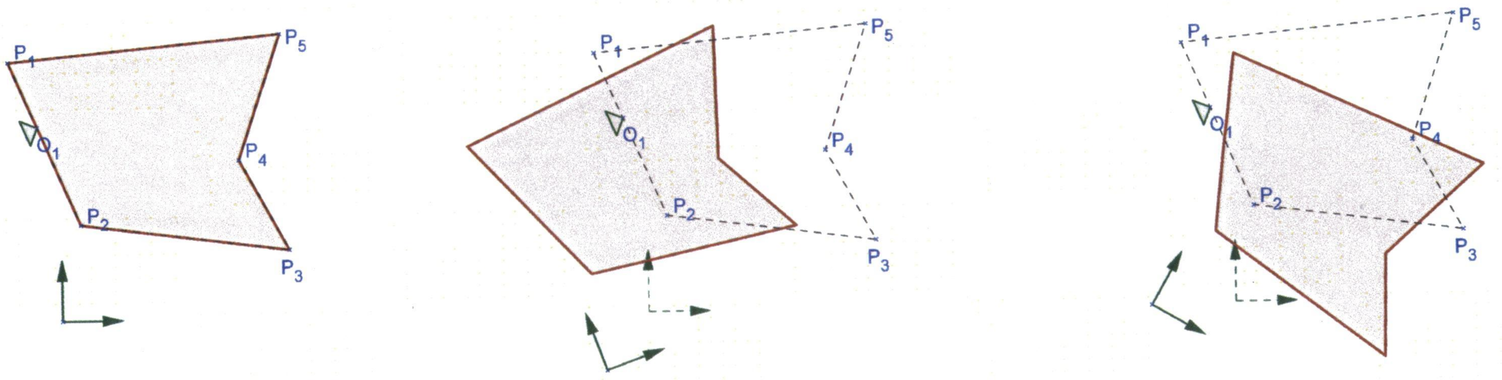


(b) La courbe continue de M à S corresponde à un mouvement du polygone de la position M à la position S dans l'espace de configurations



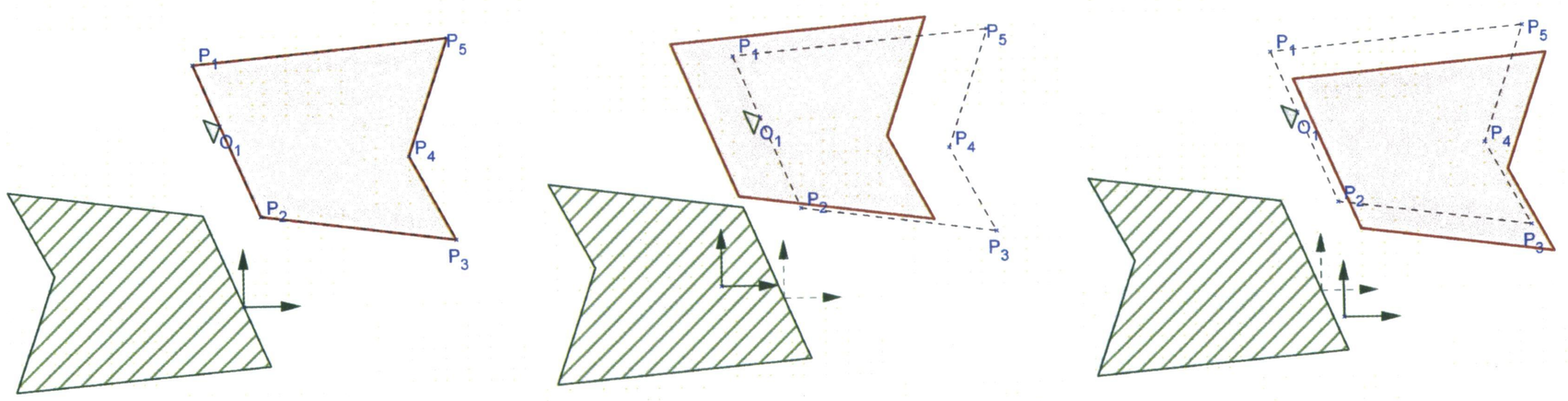
(c) Le mouvement du polygone dans le plan

FIGURE 4.6 – Toute courbe continue de M à S est un mouvement du polygone



(a) Configuration initiale (b) Configuration non légale (c) Configuration légale

FIGURE 4.7 – Configurations



(a) Configuration initiale (b) Configuration non légale (c) Configuration légale

FIGURE 4.8 – La zone de configurations non légales - configurations « parallèles » à la configurations initiale

Pour une configuration qui n'est pas interdite, on dit que c'est une position *libre de collision* ou simplement que c'est une position *légale* du polygone. Chacun des obstacles $O_i \in \mathcal{O},\ i = 1, k$ génère dans l'espace de configuration $\mathcal{C}$ un sous-ensemble :

$$\mathcal{C}O_i = \{q \in \mathcal{C} \mid \text{int}(P(q)) \cap O_i \neq \emptyset\}$$

$\mathcal{C}O_i$ est l'ensemble contenant toutes les configurations interdites du P à cause du point O_i (voir Figure 4.9). Par $\overline{\mathcal{C}O}_i$, on dénote la surface qui borne l'ensemble $\mathcal{C}O_i$.

Définition 4.9. *On appelle* l'ensemble des $\mathcal{C}-$*obstacles, et on le dénote par* $\mathcal{C}O$, *l'union des sous-ensembles engendrés par tous les points d'obstacle* $O_i \in \mathcal{O}$.

$$\mathcal{C}O = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}O_i.$$

L'union de ces régions définit l'ensemble des configurations interdites, c'est-à-dire que, pour une configuration $q \in \mathcal{C}O$, il y a au moins un point $O_i \in \mathcal{O}$ qui a pénétré l'intérieur de $P(q)$. Le sous-ensemble complémentaire de $\mathcal{C}O$ représente les positions légales du P.

Définition 4.10. *On nomme* l'espace libre *de* P, *et on le dénote par* $\mathcal{C}_{libre}$, *l'ensemble des configurations libres de collision de* P :

$$\mathcal{C}_{libre} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}O = \{q \in \mathcal{C} \mid \text{int}(P(q)) \cap \mathcal{O} = \emptyset\}$$

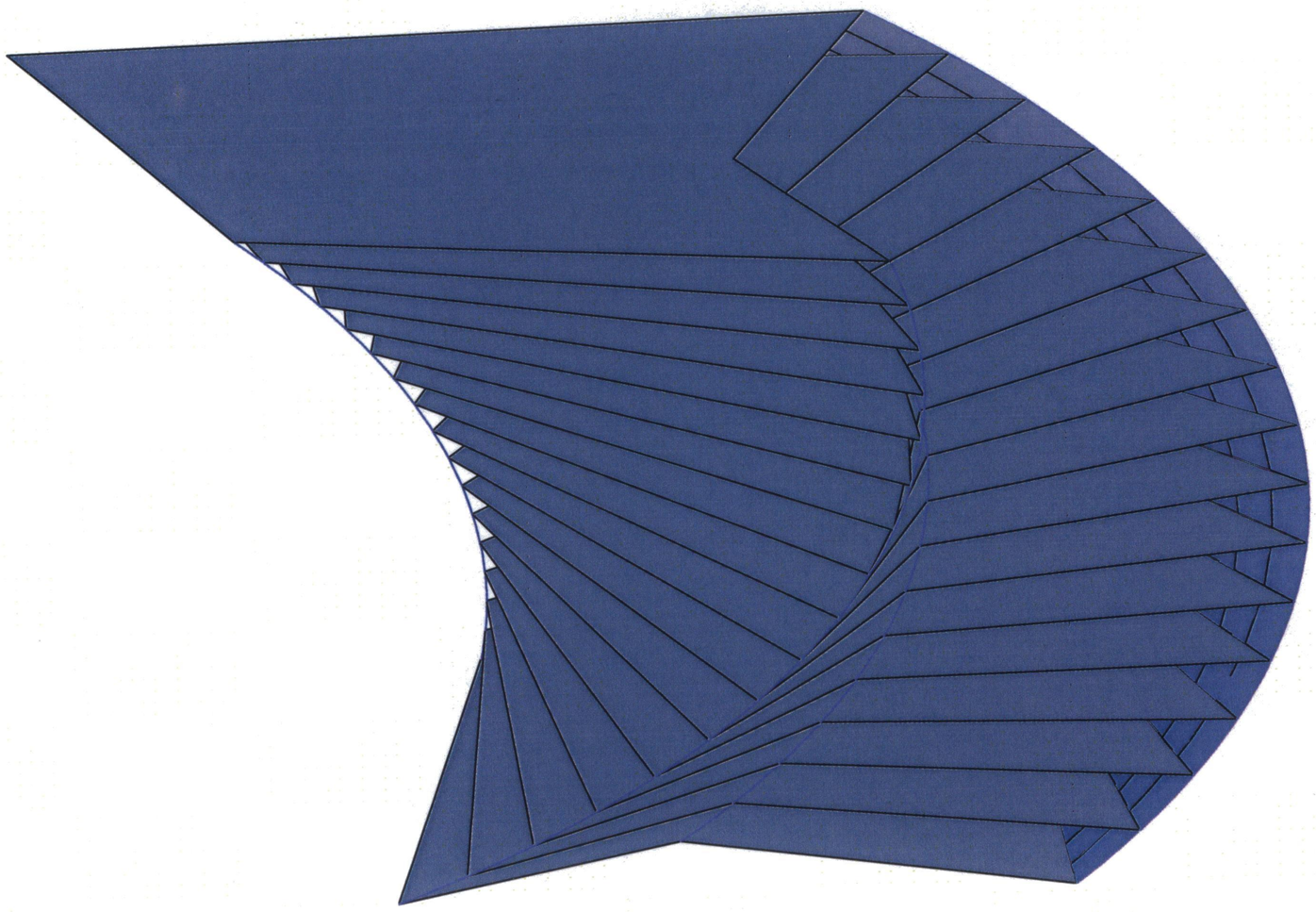


FIGURE 4.9 – Espace de configurations

Définition 4.11. *Soit $q_0, q_1 \in X$. Dans l'espace topologique X, on appelle* chemin de point initial q_0 et de point final q_1 *une application continue $f : [0,1] \to X$ tel que $f(0) = q_0$ et $f(1) = q_1$.*

Soit $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$. On appelle chemin de point initial q_0 et de point final q_1 *une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que $f(0) = q_0$ et $f(1) = q_1$.*

Définition 4.12. *Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que X est un ensemble* connexe par arcs *si, pour $\forall q_0, q_1 \in X$, il y a toujours un chemin du point initial q_0 au point final q_1.*

Définition 4.13. *Soit $q \in \mathcal{C}_{libre}$. On appelle* l'espace accessible de q, *et on le dénote par $\mathcal{C}_{libre_q}$, l'union de tous les sous-ensembles connexes par arcs de $\mathcal{C}_{libre}$ contenant q.*

$\mathcal{C}_{libre_q}$ est le plus grand sous-ensemble connexe par arcs de $\mathcal{C}_{libre}$ contenant q. Au cas général, l'espace libre, $\mathcal{C}_{libre}$, est un ensemble non connexe. L'ensemble $\mathcal{O}$ engendre une partition de $\mathcal{C}_{libre}$ en plusieurs cellules, chaque cellule étant une composante connexe par arcs.

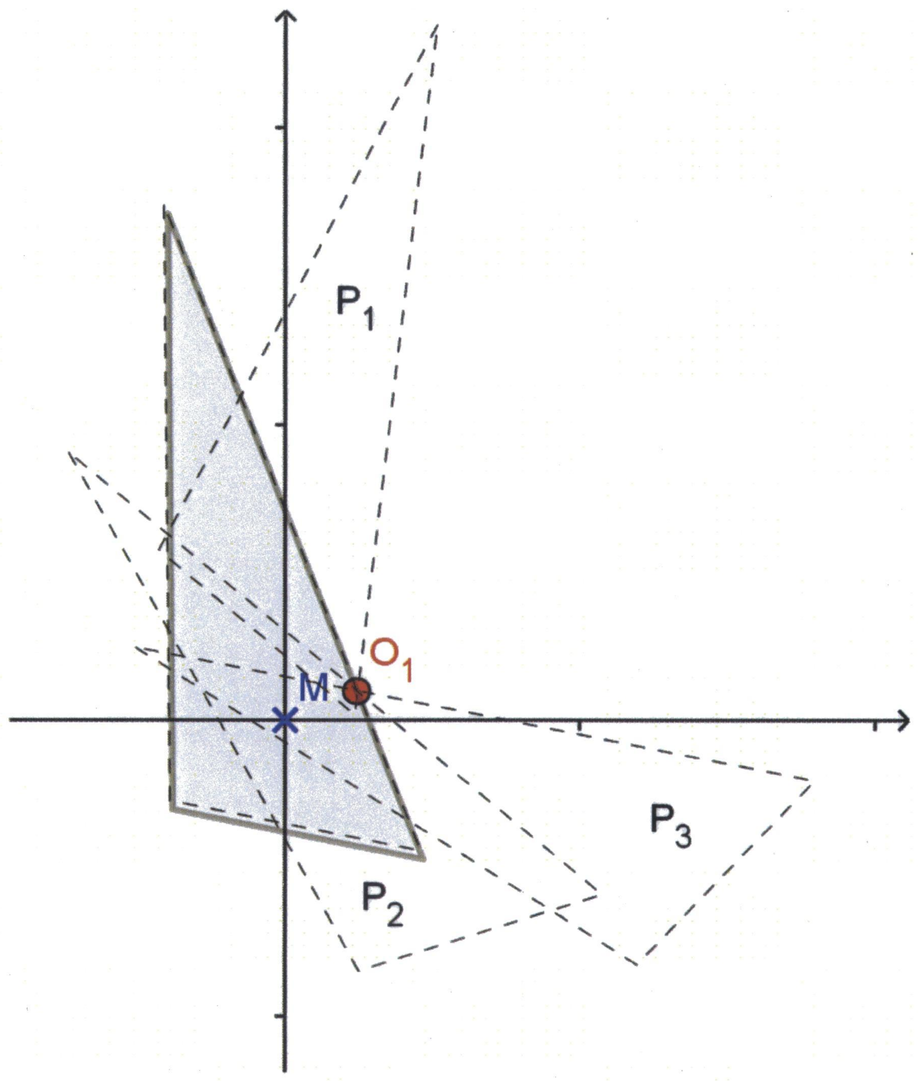
Lemme 4.2. *Soit q_0 la configuration initiale du P dans l'espace de travail $\mathcal{W}$. L'ensemble de points $\mathcal{O}$ immobilise P si et seulement si l'espace accessible de q_0, $\mathcal{C}_{libre_{q_0}}$, est l'ensemble $\{q_0\}$.*

Démonstration. Si $\mathcal{C}_{libre_{q_0}} \neq \{q_0\}$, comme $q_0 \in \mathcal{C}_{libre_{q_0}} \Rightarrow \exists q_1 \neq q_0,\ q_1 \in \mathcal{C}_{libre_{q_0}}$. Comme $\mathcal{C}_{libre_{q_0}}$ est connexe par arcs, alors, il y a un chemin de point initial q_0 et de point final q_1 inclut dans $\mathcal{C}_{libre}$. Ce chemin est un mouvement d'échappement, donc P n'est pas immobilisé.

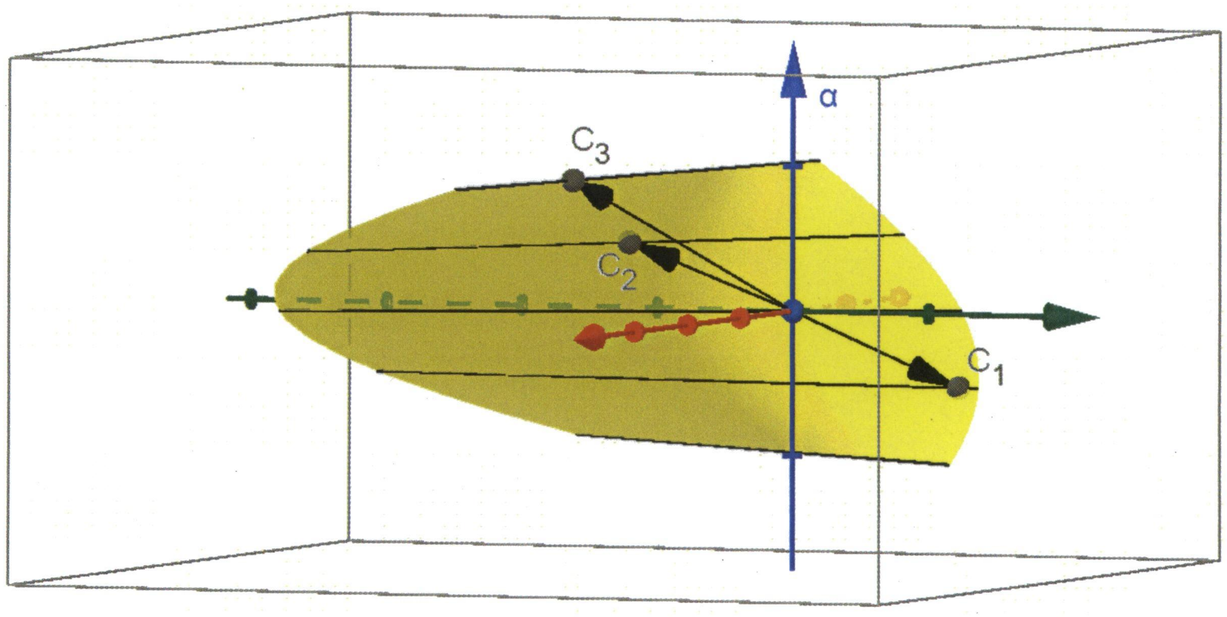
Si $\mathcal{C}_{libre_{q_0}} = \{q_0\}$, supposons, par absurde, que P n'est pas immobilisé. $\mathcal{C}_{libre_{q_0}} = \{q_0\}$ signifie que, le plus grand sous-ensemble connexe par arcs contenant q_0 est l'ensemble $\{q_0\}$. La supposition que P n'est pas immobilisé signifie que, il y a un mouvement d'échappement et P peut se déplacer dans une autre position $q_1 \neq q_0$ et ce déplacement se fait sans passer par des positions illégales. À ce mouvement correspond un chemin de la position initiale q_0 à la position finale q_1. Comme, au long du mouvement, P ne passe pas par de positions illégales, la trajectoire de ce chemin est contenue dans $\mathcal{C}_{libre}$ donc, $\{q_0\}$ n'est pas le plus grand sous-ensemble connexe par arcs de $\mathcal{C}_{libre}$ contenant q_0, ce qui contredit l'hypothèse de départ que

$\mathcal{C}_{libre_{q_0}} = \{q_0\}$. □

La partition de $\mathcal{C}_{libre}$ en cellules, engendrée de l'ensemble $\mathcal{O}$, est une partition qui contienne un nombre fini de cellules. On peut définir la distance entre q_0 et une cellule $\mathcal{C}_i$ comme $d(q_0, \mathcal{C}_i) = \min\{dist(q_0, x) | x \in \mathcal{C}_i\}$. La distance entre q_0 et $\mathcal{C}_{libre_{q_0}}$ est 0 et pour toutes les autres cellules la distance est plus grande que 0. Si on va choisir un boule contenant q_0 suffisamment petite l'intersection entre cette boule et l'espace $\mathcal{C}_{libre}$ sera contenue dans $\mathcal{C}_{libre_{q_0}}$. Il est suffisant d'analyser l'espace de configurations juste dans cette boule pour décider si le polygone P est immobilisé ou pas. Le premier avantage d'analyser l'espace de configurations juste pour une telle boule est que la boule est l'espace $\mathbb{R}^3$ sont isomorphe. Un autre avantage est que chaque point $O_i \in \mathcal{O}$ divise la boule en deux parties connexes, une contenant des positions libres est l'autre contenant des postions non légales. La surface qui délimite les deux parties connexes représente des positions où le point O_i se trouve sur un côté du polygone P (voir Figure 4.10). Cette surface est une surface générée par un droite en mouvement. En mathématique une telle surface est appelée *surface réglée*. Compte tenu que dans la position initiale tous les points $O_i \in \mathcal{O}$ sont positionnés à l'intérieur des côtés du polygone on déduit que toutes ces surfaces passent par le point q_0. À chaque point d'obstacle corresponde une surface qui passe par l'origine de l'espace de configurations (voir Figure 4.11). Cet espace est divisé par ces surfaces en cellules, chaque cellule contenant les mêmes types de configurations (légales ou non légales).

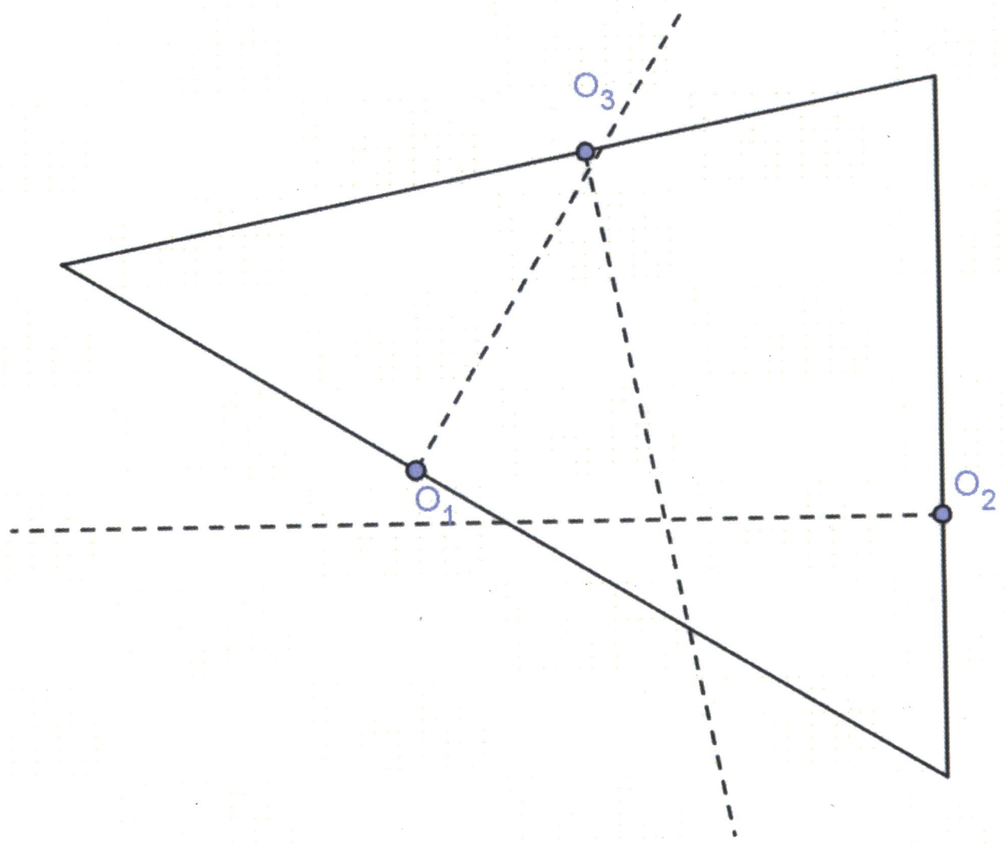


(a) Le point d'obstacle O_1 appartenant à un côté du triangle

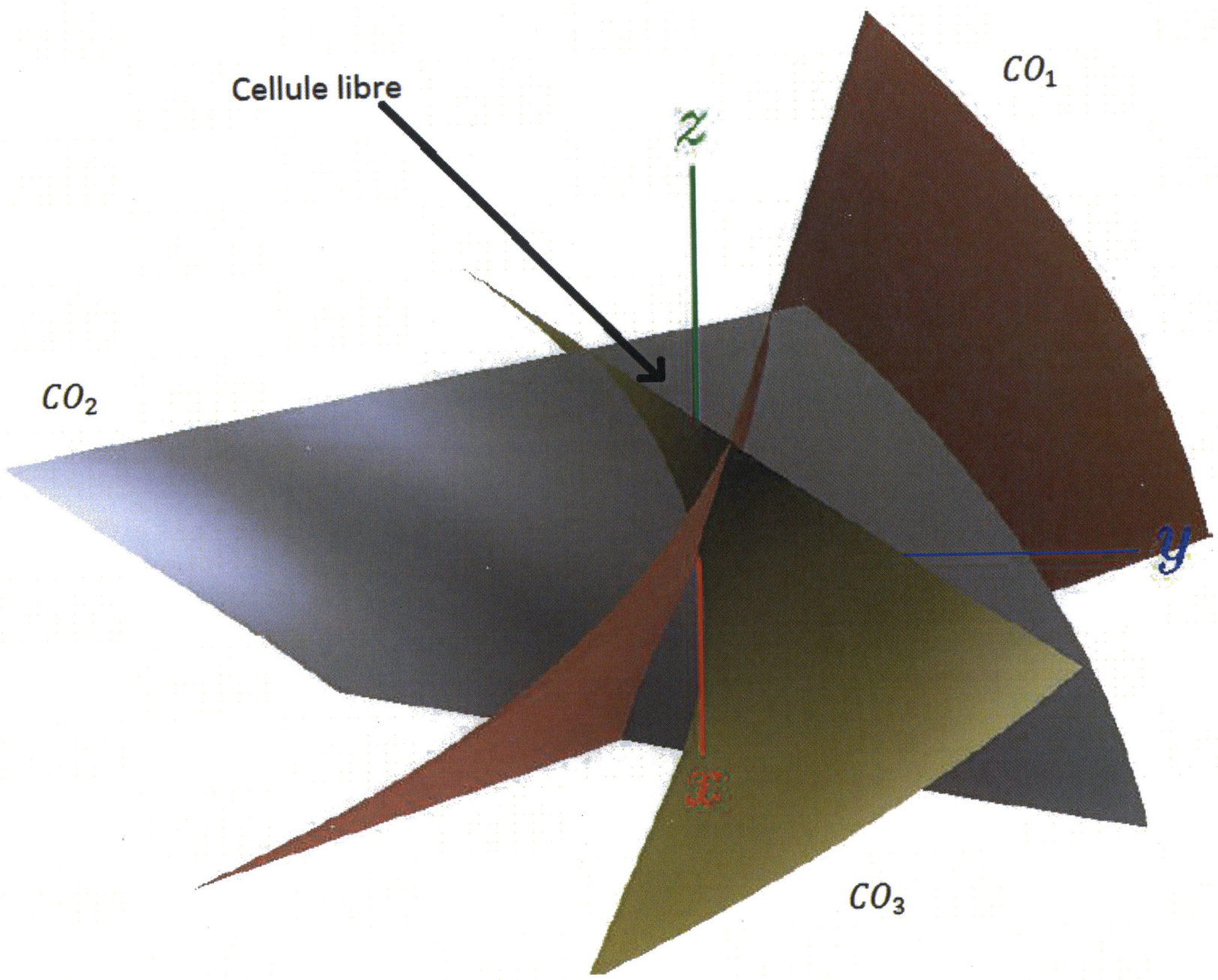


(b) La surface générée par le point d'obstacle O_1 dans l'espace de configurations

FIGURE 4.10 – L'espace de configurations est divisé par la surface générée par un point d'obstacle. Les positions P_1, P_2, P_3 du polygone correspondent aux points C_1, C_2, C_3, respectivement, dans l'espace de configurations.



(a) Trois points d'obstacle, O_1, O_2 et O_3 sur le bord du triangle



(b) L'espace de configurations divisé par les surfaces correspondantes aux points d'obstacle O_1, O_2 et O_3

FIGURE 4.11 – L'espace de configurations est divisé en cellules par les surfaces correspondant aux points d'obstacle

Chapitre 5

Glissements

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur une classe finie de mouvements G et on montrera que, si le polygone n'est pas immobilisé, alors, au moins un mouvement de G sera tel qu'aucun point de O ne pénétrera pas le polygone P. Également, si tout mouvement de G fera pénétrer au moins un point de O à l'intérieur de P, alors, P est immobilisé par O. Les mouvements appartenant à cette classe seront appelés *glissements*. Comme la classe de glissements est finie, cela résultera en un algorithme qui vérifiera si le polygone est effectivement immobilisé.

Définition 5.1. *Soient O_i et O_j deux points d'obstacle ($O_i, O_j \in O$). On suppose que O_i et O_j sont situés sur les côtés $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$, $P_{c_{[j]}}P_{c_{[j+1]}}$ respectivement. On appelle* glissement de polygone P sur les points O_i et O_j, *un mouvement du P tel que, durant chaque moment du mouvement, les points O_i et O_j appartiennent aux prolongements*

des côtes $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$, $P_{c_{[j]}}P_{c_{[j+1]}}$ *respectivement.*

Étant donné que l'ensemble de points d'obstacle est un ensemble de n éléments, on a $\binom{n}{2}$ glissements possibles, donc il est possible de vérifier tous ces mouvements. Par la définition 5.1, on veut dire que deux points différents Q, R, chacun appartenant à l'intérieur d'un côté de polygone P, définissent un mouvement de chaque autre point de P qui est uniquement déterminé. On dénotera un tel glissement par $G(P, Q, R)$.

On distingue les *glissements positifs*, dénotés par $G^+(P, Q, R)$ les glissements où l'angle ϕ de l'espace de configuration est non-négatif au début du mouvement et les *glissement négatifs* dénotés par $G^-(P, Q, R)$ où l'angle ϕ demeure non-positif au début de glissement.

Comme tout glissement est un mouvement, un *glissement d'échappement* est un glissement qui est à la fois glissement et mouvement d'échappement.

Observation 5.1. *Si les côtés* $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$ *et* $P_{c_{[j]}}P_{c_{[j+1]}}$ *sont parallèles, alors, le glissement du polygone sur* O_i *et* O_j *est une translation de direction commune des côtés* $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$ *et* $P_{c_{[j]}}P_{c_{[j+1]}}$ *du polygone.*

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions certaines propriétés des glissements. En particulier, il nous intéresse les trajectoires des autres points reliés au polygone en mouvement. Également, à la place d'étudier le mouvement du polygone entre les points d'obstacles immobilisés, il est intéressant de considérer le mouvement rigide inverse d'une configuration de points lorsque le polygone demeure immobile.

Si les côtés $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$ et $P_{c_{[j]}}P_{c_{[j+1]}}$ ne sont pas parallèles, alors, il y a un point d'intersection des prolongements de deux côtés $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$ et P_jP_{j+1}. Soit $C_{i,j}$ ce point d'intersection et soit $\mathcal{C}_r$ le cercle passant par les points O_i, O_j et $C_{i,j}$. On glisse le polygone sur les points O_i et O_j et on dénote par $P'_{c_{[i]}}P'_{c_{[i+1]}}$ et $P'_{c_{[j]}}P'_{c_{[j+1]}}$ les positions des côtés du polygone P à un moment donné t. La nouvelle position du point d'intersection des prolongements de deux côtés, $P_{c_{[i]}}P_{c_{[i+1]}}$ et $P_{c_{[j]}}P_{c_{[j+1]}}$ respectivement, sera notée $C'_{i,j}$ (voir Figure 5.1).

Lemme 5.2. *$C'_{i,j}$ se trouve sur le cercle $\mathcal{C}_r$.*

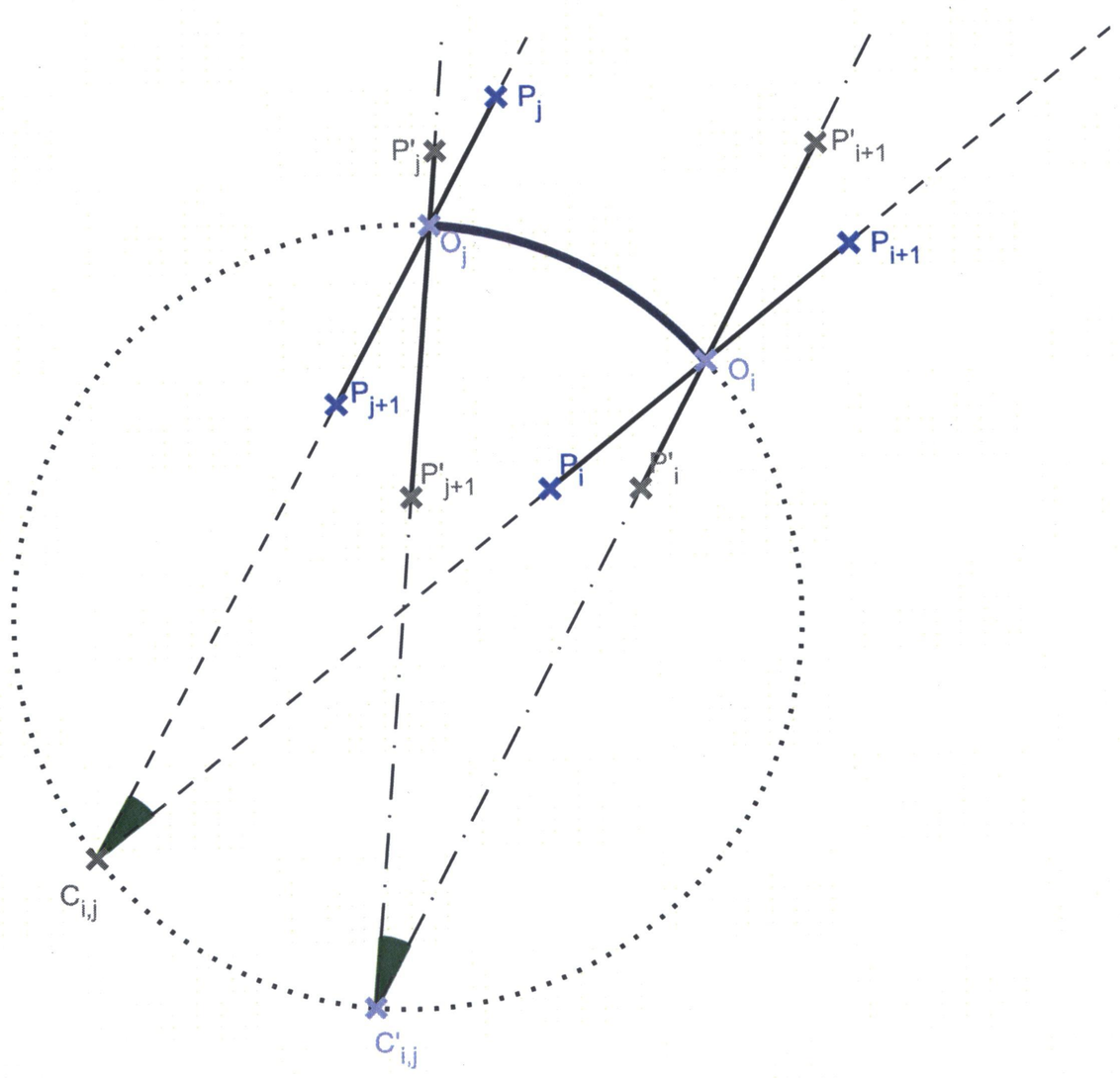


FIGURE 5.1 – $C'_{i,j}$ se déplace sur le cercle $\mathcal{C}_r$

Démonstration. Les glissements, comme tout mouvement rigide, préservent les distances, les angles et l'orientation. Le lieu géométrique des points formant avec O_i et O_j le même angle est un arc de cercle. Alors, les points O_i, O_j, $C_{i,j}$ et $C'_{i,j}$ sont cocycliques. □

On dénote par :

— r - le rayon du cercle $\mathcal{C}_r$

— $H'_{i,j}$ l'intersection de la perpendiculaire en O_i à $(P'_iP'_{i+1})$ et la perpendiculaire en O_j à $(P'_jP'_{j+1})$

— $\mathcal{C}_R$ - cercle de centre $C'_{i,j}$ et de rayon $R = 2r$.

Les observations de 5.3 à 5.7 peuvent être prouvées facilement utilisant des propriétés géométriques bien connues des quadrilatères inscriptibles comme :- deux angles opposés sont supplémentaires ou - l'angle formé d'une diagonale et un côté est égal à l'angle formé d'autre diagonale et le côté opposé.

Observation 5.3. *Le point d'intersection $H'_{i,j}$ se trouve sur le cercle $\mathcal{C}_r$.*

Observation 5.4. *Le segment $[C'_{i,j}H'_{i,j}]$ est diamètre du cercle $\mathcal{C}_r$ et rayon du cercle $\mathcal{C}_R$.*

Observation 5.5. *Le mouvement de glissement du polygone P sur les points O_i et O_j $(G(P, O_i, O_j))$ est obtenu par un* roulement sans glissement *du cercle $\mathcal{C}_R$ (de rayon $R = 2r$) autour du cercle $\mathcal{C}_r$ (de rayon r).*

Observation 5.6. *Pour le mouvement de glissement du polygone P sur les points O_i et O_j $(G(P, O_i, O_j))$, correspond, comme mouvement rigide inverse, le* roulement sans glissement *du cercle $\mathcal{C}_r$ sur l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_R$.*

Observation 5.7. *Le point $H'_{i,j}$ est le point de tangence des cercles $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_R$ durant ce roulement.*

5.1 Roulement d'un cercle sur un autre cercle

Soient $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{C}_F$ deux cercles tangentes intérieurement. Le cercle $\mathcal{C}_F$, de centre F et de rayon r_{C_F} est fixe, et le cercle $\mathcal{C}_M$, de rayon r_{C_M}, $r_{C_M} \neq r_{C_F}$, roule sans glissement sur le cercle $\mathcal{C}_F$. On dénote, par M, le centre du cercle $\mathcal{C}_M$, T, le point de tangence de deux cercles, T_{iF}, le point initial de tangence sur le cercle fixe et T_{iM}, le point initial de tangence sur le cercle mobile (voir Figure 5.2). *Roulement sans glissement* signifie que, tout au long du roulement, l'arc de cercle mobile $\widehat{T_{iM}T}$ et l'arc du cercle fixe $\widehat{T_{iF}T}$ qui sont roulés un sur l'autre ont la même longueur.

On dénote par, α_F, l'angle au centre sous-tendu par l'arc $\widehat{T_{iF}T}$ et, α_M, l'angle au centre sous-tendu par l'arc $\widehat{T_{iM}T}$.

Lemme 5.8. $\alpha_M = \frac{r_{C_F}}{r_{C_M}}\alpha_F$

Démonstration. Soit l la longueur de deux arcs de cercle $\widehat{T_{iF}T}$ et $\widehat{T_{iM}T}$. On a $l = r_{C_M}\alpha_M$ et $l = r_{C_F}\alpha_F$, donc $r_{C_M}\alpha_M = r_{C_F}\alpha_F \Rightarrow \alpha_M = \frac{r_{C_F}}{r_{C_M}}\alpha_F$ □

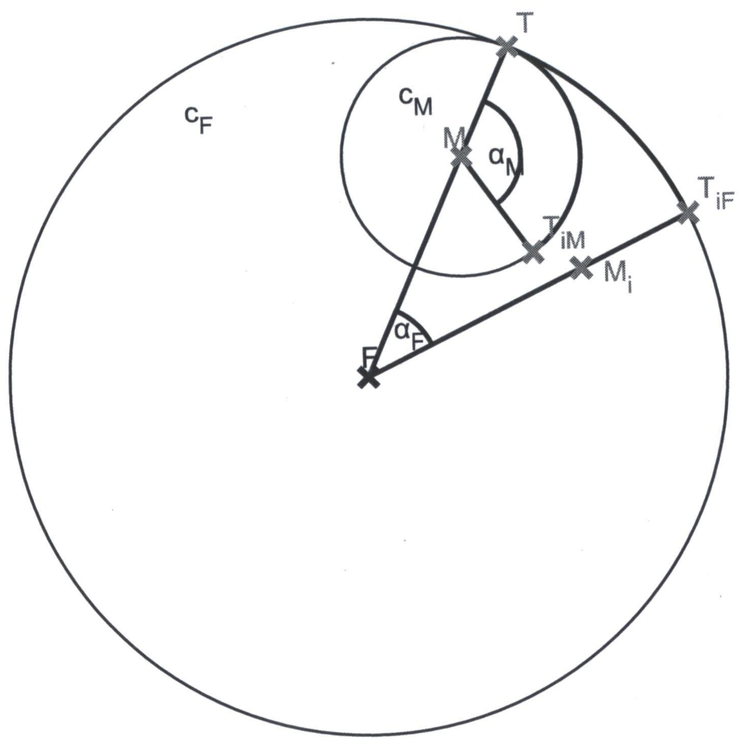


FIGURE 5.2 – Roulement d'un cercle sur un autre cercle (intérieurement)

5.2 Roulement d'un cercle *autour* d'un autre situé à l'intérieur

Le roulement d'un cercle de rayon $R = 2r$, noté $\mathcal{C}_R$, sur un cercle de rayon r, noté $\mathcal{C}_r$, situé à l'intérieur du $\mathcal{C}_R$, correspond au mouvement de glissement du polygone sur deux points d'obstacle immobiles. On dénote, par F, le centre du cercle $\mathcal{C}_r$ et, par M, le centre du cercle $\mathcal{C}_R$ (voir Figure 5.3). Puisque $\mathcal{C}_R$ roule sur $\mathcal{C}_r$, on a toujours un point de contact H où le cercle $\mathcal{C}_r$ est tangent intérieurement au cercle $\mathcal{C}_R$. Soit $\widehat{H_0H}$ l'arc du cercle $\mathcal{C}_R$ et $\widehat{H_1H}$ l'arc du cercle $\mathcal{C}_r$ tel que ces deux arcs ont roulé un sur l'autre jusqu'au moment du temps t.

Lemme 5.9. *Les points M, H_0 et H_1 sont colinéaires.*

Démonstration. Les angles $\widehat{HFH_1}$ et $\widehat{HMH_1}$ sont, respectivement, l'angle au centre

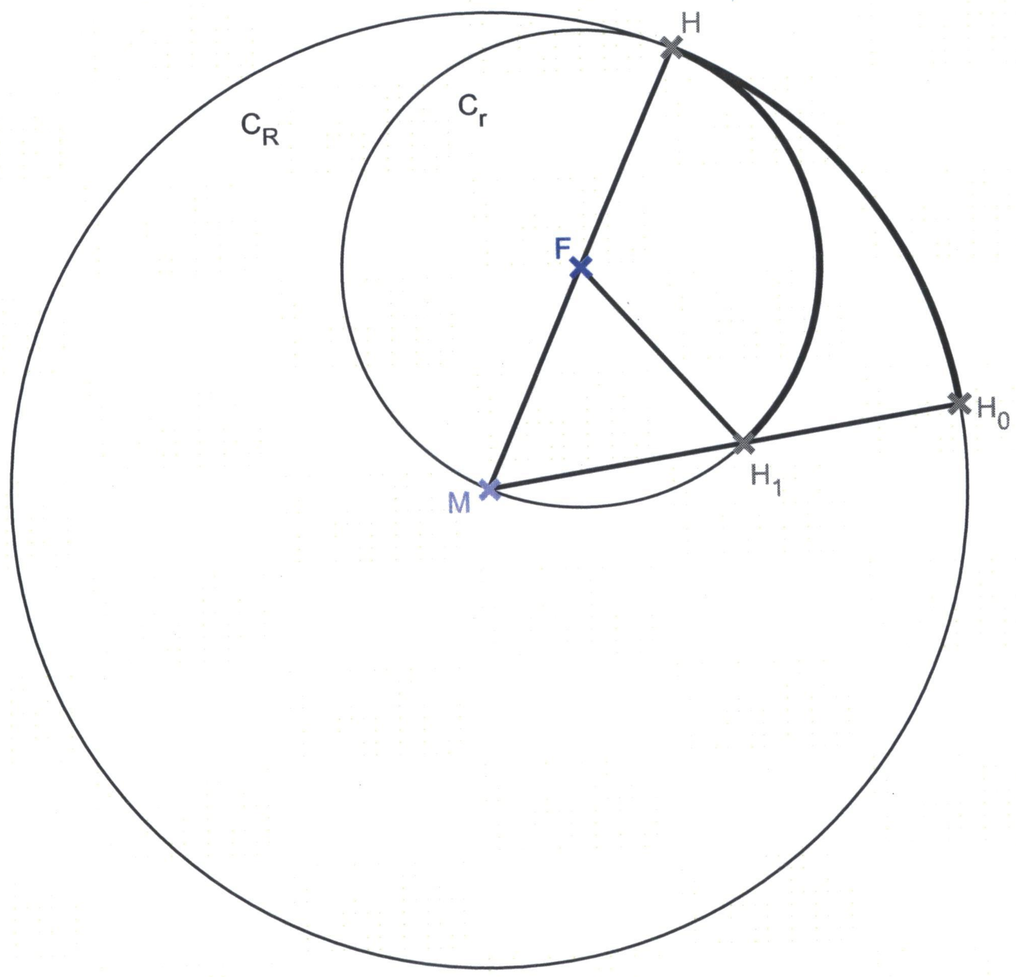


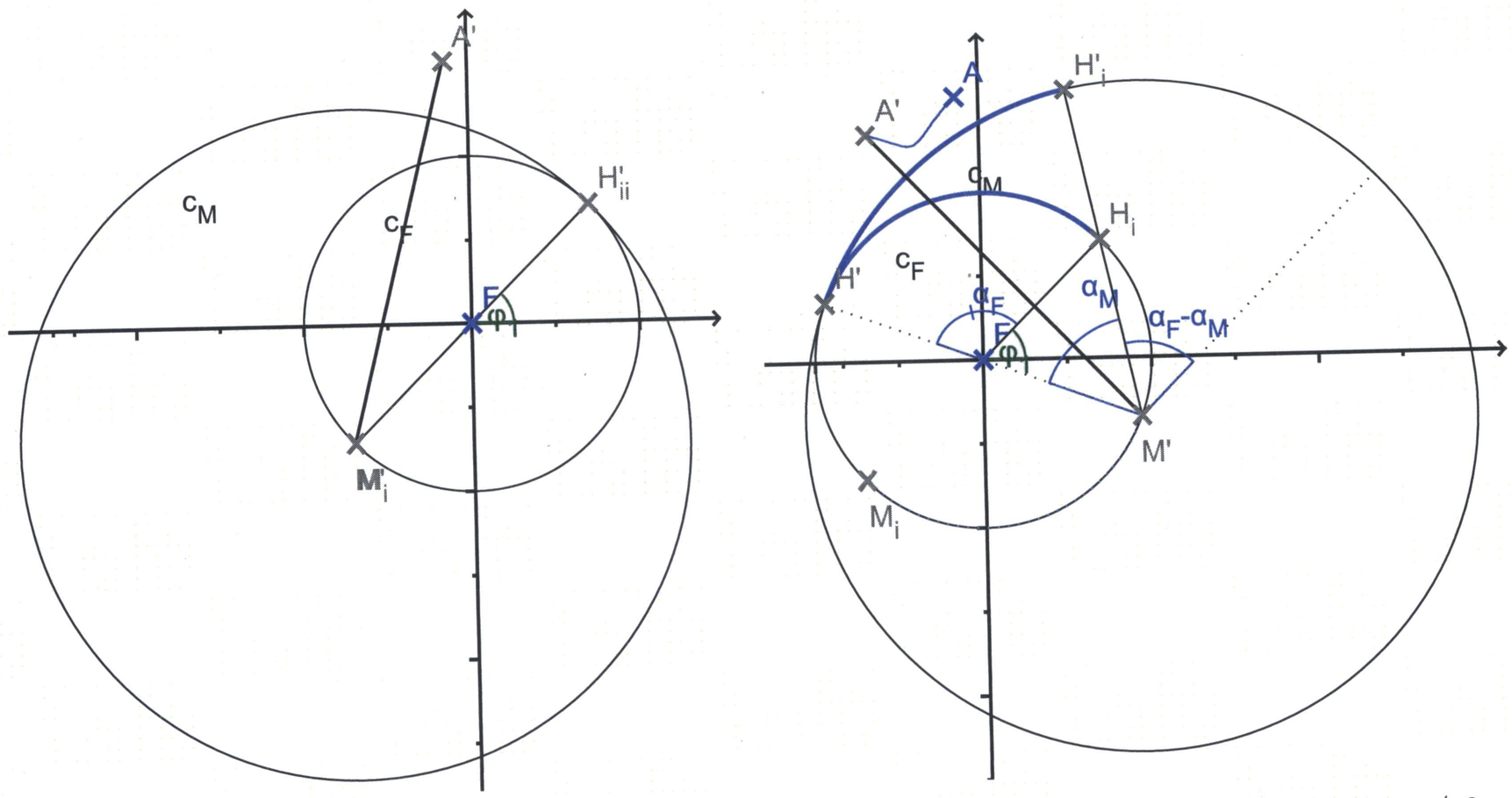
FIGURE 5.3 – Roulement sans glissement du $\mathcal{C}_R$ autour du $\mathcal{C}_r$

et l'angle inscrit interceptant le même arc du cercle $\mathcal{C}_r$. En conséquence $\widehat{HFH_1} = 2\widehat{HMH_1} = 2\alpha$. Vu que $R = 2r$ les arc $\widehat{HH_0}$ et $\widehat{HH_1}$ sont de même longueur, alors, l'angle au centre de cercle $\mathcal{C}_R$ interceptant l'arc $\widehat{HH_1}$ est égal à $\frac{1}{2}\widehat{HFH_1} = \alpha$. Alors, M, H_0 et H_1 sont colinéaires. □

L'équation paramétrique de la courbe décrite par la mouvement d'un point quelconque D, lié au cercle $\mathcal{C}_R$, qui se trouve à une distance d du M, est :

$$\begin{cases} x(t) = x_F + rcos(2t) + dcos(t) \\ y(t) = y_F + rsin(2t) + dsin(t) \end{cases}$$

La courbe décrite par la trajectoire du point D est une courbe cycloïdale. Dans le



(a) Au moment t=0 (b) Après un roulement de longueur t $\neq 0$

FIGURE 5.4 – Roulement d'un cercle autour d'un autre cercle (intérieurement)

cas spécial où $d = 2r$ (voir Figure 5.4), la courbe décrite est une cardioïde. Les points appartenant au polygone sont des points liés au cercle $\mathcal{C}_R$, donc ils se déplacent sur des courbes cycloïdales.

Chapitre 6

Algorithmes gloutons vérifiant immobilisation

6.1 L'environnement d'immobilisation en position générale

Dans cette section nous présentons un algorithme vérifiant l'immobilisation lorsque ses paramètres (la forme du polygone, les positions de points d'obstacle) sont en position générale. En géométrie algorithmique la position générale correspond à l'environnement géométrique où toute paire de droites ou des plans ne sont pas parallèles, toute triple de droites ne s'intersectent pas, toute triple de points ne sont pas colinéaires, toute quadruple de points ne sont pas coplanaires ou co-circulaires.

L'environnement géométrique généré de façon aléatoire est toujours en position générale. Pour l'ensemble de points d'obstacle en position générale nous avons un algorithme qui fonctionne en temps $\mathcal{O}(n)$.

6.2 L'algorithme vérifiant l'immobilisation en position générale

À chaque point d'obstacle O_i correspond dans l'espace de configurations une surface réglée qui sépare les positions valides de celles où O_i pénètre à l'intérieur du polygone. Les points qui se trouvent sur la surface $\mathcal{C}O_i$ correspondent aux positions valides par rapport au point O_i. Comme tous les points d'obstacle sont positionnés sur les côtés du polygone, cette position du polygone correspond (dans l'espace de configurations) à un point qui se trouve à l'intersection de toutes ces surfaces. On dénote cette position par q_0 et il est l'origine de l'espace de configurations. Ces surfaces génèrent une partition de l'espace de configuration en cellules. Chaque cellule contient un seule type de positions. Les cellules qui contiennent des positions valides sont des ensembles fermés et les cellules qui contient des positions où un ou plusieurs points d'obstacle pénètre à l'intérieur du polygone sont des ensembles ouverts. Soit $\vec{P}_i$ le vecteur orthogonal à la surface de $\mathcal{C}O_i$ au point q_0, $\vec{P}_i$ orienté vers la partie libre de $\mathcal{C}O_i$. Considérons l'algorithme suivant : Nous allons prouver ci-dessous l'exactitude et la complexité de l'algorithme 1.

Algorithme 1 : IMMPG Détermine si le polygone est immobilisé ou pas.

Entrées : Un ensemble fini $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ de points d'obstacle, situés au bord du polygone P (sauf sommets)

Output : Si le polygone P est immobilisé par $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ou pas

pour $i \leftarrow 1$ ***à*** n **faire**
  Calculer $\vec{P}_i$

`/*` π_i `- demi-espace ouvert, orthogonale à` $\vec{P}_i$`, passant par l'origine avec` $\vec{P}_i$ `orienté vers l'extérieur de` π_i `*/`

pour $i \leftarrow 1$ ***à*** n **faire**
  Calculer π_i

Determiner si l'intersection $\Pi = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i$ est vide. **si** $\Pi = \varnothing$ **alors**
  Retourner « Le polygone P est immobilisé par l'ensemble $O = \{O_1, \ldots, O_n\}$ »

sinon
  Retourner « Il existe un mouvement d'échappement de P »

Théorème 6.1. *Soit l'environnement en position générale contenant un polygone P et un ensemble de points d'obstacle $O = O_1, \ldots, O_n$ appartenant au périmètre de P, O_i différent des sommets du polygone. Algorithme 1 détermine correctement an temps $O(n)$ si l'ensemble de points d'obstacle immobilise le polygone. Dans le cas affirmatif il existe un ensemble de 4 points d'obstacle qui suffit pour immobiliser le polygone.*

Démonstration. Un demi-espace est un ensemble convexe. Tous ces demi-espaces passent par le point q_0 qui est la position initiale du polygone. Comme nous sommes dans le cas de position générale, ça signifie que si l'intersection de demi-espaces π_i est non vide alors cette intersection prends la forme d'un cône au sommet q_0 et toutes les mouvements vers l'intérieur de ce cône sont des mouvements d'échappement.

Conséquemment, vu qu'il existe un mouvement d'échappement, l'algorithme rapporte en ligne 8 que le polygone n'est pas immobilisé.

Supposons maintenant que l'intersection Π de demi-espaces $\pi_i, i = 1, \ldots, n$ est vide. Cela signifie que l'ensemble de points où P peut se déplacer se limite à l'origine q_0 et l'algorithme reporte en ligne 6 que P est immobilisé. Par théorème de Helly (voir Théorème 2.9) il existe quatre demi-espaces $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ ouverts, tels que $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3 \cup \pi_4 = \varnothing$. Comme ces quatre plans passent par le même point q_0 ça signifie que trois demi-espaces forme un cône et le quatrième coupe ce cône et empêche toutes les mouvements d'échappement.

Pour chaque point d'obstacle O_i on connait la position du point sur le polygone et la direction du vecteur $\vec{n}_i$, le vecteur perpendiculaire sur le côté du polygone, orienté vers l'intérieur du polygone. En utilisant ces informations on peut calculer en temps constant $\vec{P}_i$ et π_i. On doit faire ce calcul pour chaque point donc ces opérations prennent temps $O(n)$.

Pour déterminer si l'intersection est vide on ne calcule pas l'intersection et on utilise l'algorithme de programmation linéaire. L'algorithme de programmation linéaire de Megiddo [11], pour un problème en d variable et n contraintes, est un algorithme d'ordre $O(n)$ pour d-fixé. Pour nous d=3, donc les temps d'exécution est d'ordre $O(n)$. On doit appeler cet algorithme 6 fois, pour determiner le minimum et le maximum pour chaque dimension. Donc on peut déterminer si l'intersection est vide en temps $O(n)$. □

6.3 L'environnement d'immobilisation en position quelconque

Dans cette section nous allons considérer la position quelconque de l'environnement. En particulier, le polygone peut avoir les côtés parallèles, les ensembles de quatre points peuvent être cocycliques, trois droites peuvent avoir des points d'intersections communs etc.

Nous prouvons d'abord :

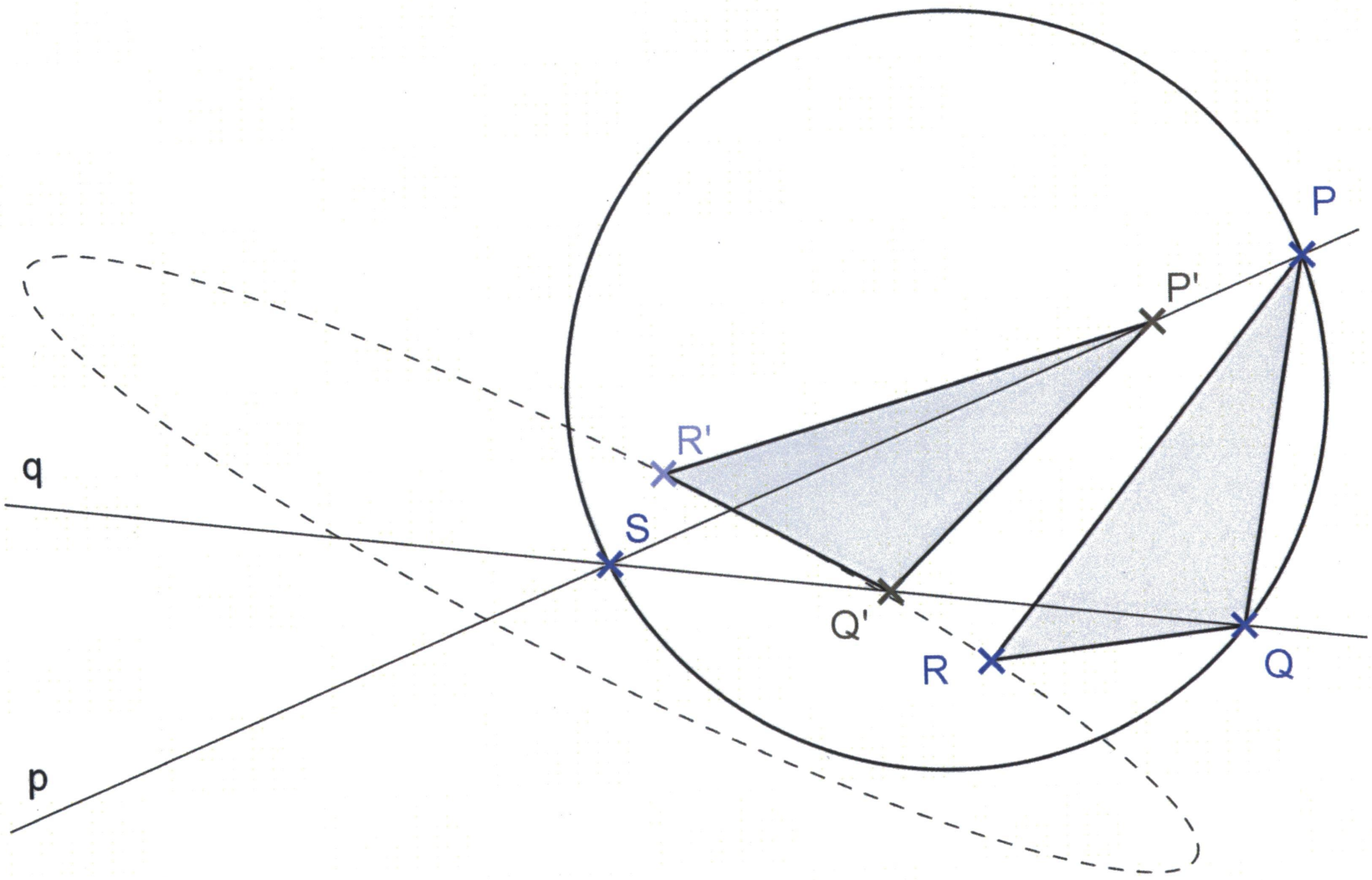
Lemme 6.2. *Soit un polygone P et un ensemble de points d'obstacle $O = \{O_1, \ldots, O_n\}$, chaque point appartenant à l'intérieur d'un côté du polygone P. Polygone P est immobilisé par ensemble O si et seulement s'il n'existe pas une paire de points d'obstacle O_i, O_j telle que le glissement $\mathcal{G}^+(P, O_i, O_j)$ ou $\mathcal{G}^-(P, O_i, O_j)$ est un glissement d'échappement du polygone P.*

Démonstration. Prenons l'ensemble de $\mathcal{CO}$ à l'intérieur d'une boule suffisamment petite centré au point de l'espace de configurations correspondant à la position initiale du polygone P. Ce point est l'origine de l'espace de configurations $\mathcal{C}$. Chaque $\mathcal{C}_{obstacle}\,\mathcal{CO}_i$ est borné par une surface $\overline{\mathcal{CO}_i}$ passant par l'origine. Ces surfaces partitionnent la boule en cellules. Certaines de ces cellules peuvent appartenir à $\mathcal{C}_{libre}$. Le polygone est immobilisé si, et seulement si, il existe un voisinage suffisamment petit V_ϵ de l'origine, pour $\epsilon > 0$, tel que à l'intérieur de V_ϵ l'origine est le seul point appartenant à $\mathcal{C}_{libre}$. Dans le cas contraire, prenons une cellule qui contient un point libre

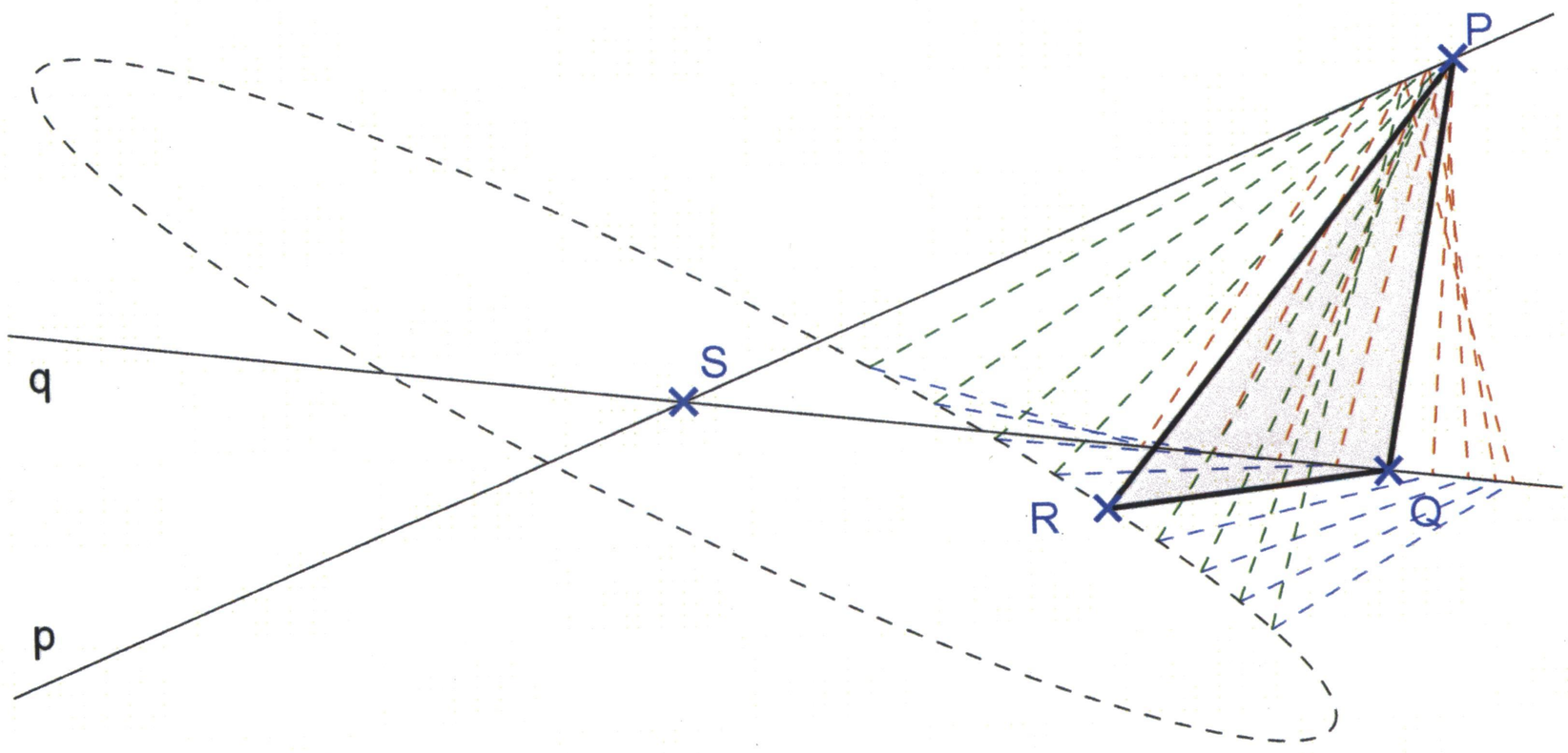
dans n'importe quel voisinage de l'origine. Cette cellule contient alors une courbe libre. Comme cette cellule est bornée par surfaces de $\mathcal{C}_{obstacles}$, la courbe formant l'intersection de deux telles surfaces est aussi une courbe d'échappement et elle correspond au glissement d'échappement. Par conséquent, l'existence d'un mouvement d'échappement est équivalent à l'existence d'un glissement d'échappement, ce qui conclut la preuve. □

La prochaine théorème caractérise les mouvements des autres points d'obstacle pendant un glissement.

Théorème 6.3 (Théorème de Schooten)**.** *Supposons qu'un triangle rigide PQR se déplace sur le plan de sorte que les points P et Q appartiennent aux droites p et q, respectivement, qui s'intersectent au point S. Dans ce cas, la trajectoire de point R est une ellipse, possiblement dégénérée, centrée au point S (voir Figure 6.1).*



(a)

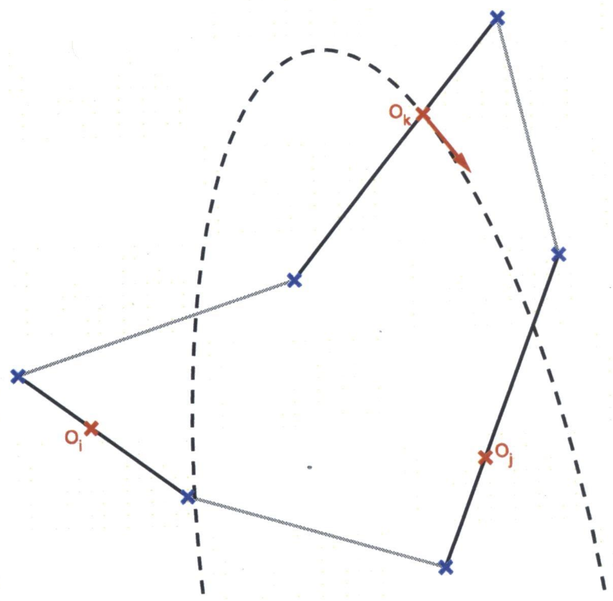


(b)

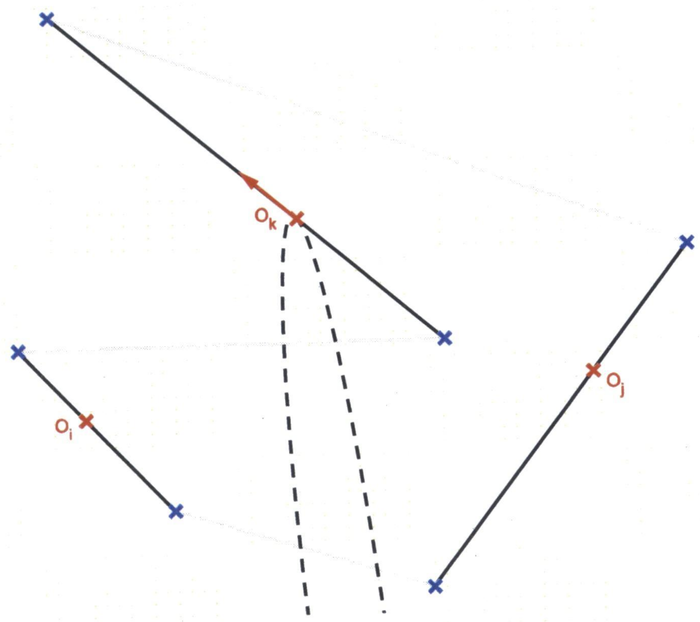
FIGURE 6.1 – Théorème de Schooten. Points P et Q glissent sur les droites p et q. Point R traverse une ellipse centré au point S - l'intersection de p et q.

Théorème 6.4. *Considérons un mouvement du triangle PQR, de sorte que durant ce mouvement chaque sommet P, Q et R appartient a un segment de droite. Tel mouvement est possible si et seulement si les trois droites p, q et r contenant, respectivement les segments de mouvements des points P, Q et R, respectivement, s'intersectent au même point S, et les quatre points P, Q, R, S sont cocycliques.*

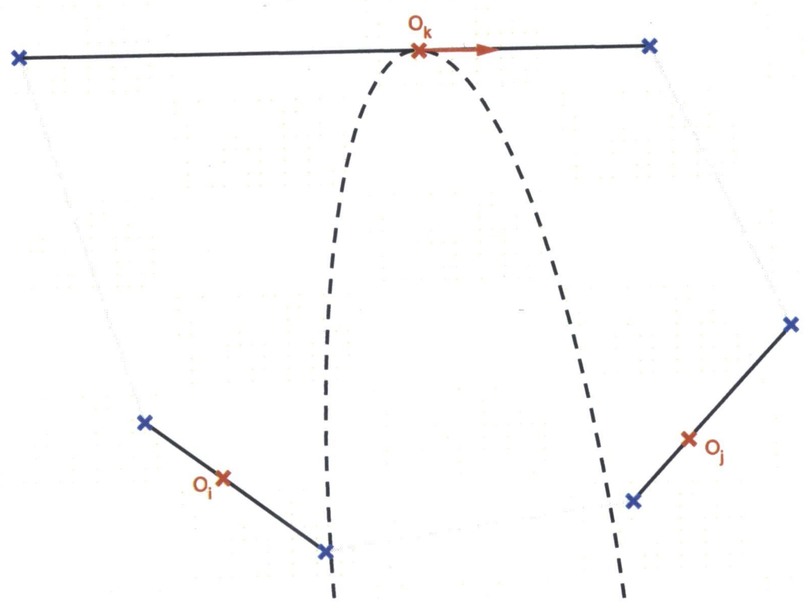
Démonstration. Soit S le point d'intersection de droites p et q. Supposons, par symétrie, que les trois points P, Q et S forment une orientation négative, (voir Figure 6.1), c'est-à-dire que $PQSP$ correspond au parcours du triangle PQS en sens horaire. PQR dénote la position initiale du triangle. Par le théorème de Schooten, la trajectoire du point R est une ellipse centrée en S. Supposons que cette ellipse est dégénérée à un segment. Ce segment doit contenir le point S, donc le triangle doit arriver à une position où la position R' du sommet R coïncide avec le point S. Les positions de sommets P et Q, sont en ce moment dans les points P' et Q', respectivement, sur les droites p et q.



(a) Glissement positif sur O_i et O_j empêché par O_k



(b) O_k permet le glissement positif et le glissement négatif sur O_i et O_j



(c) O_k empêche le glissement positif et le glissement négatif sur O_i et O_j

FIGURE 6.2 – Illustration du test si un glissement sur deux points d'obstacle O_i et O_j est empêché par un troisième point O_k

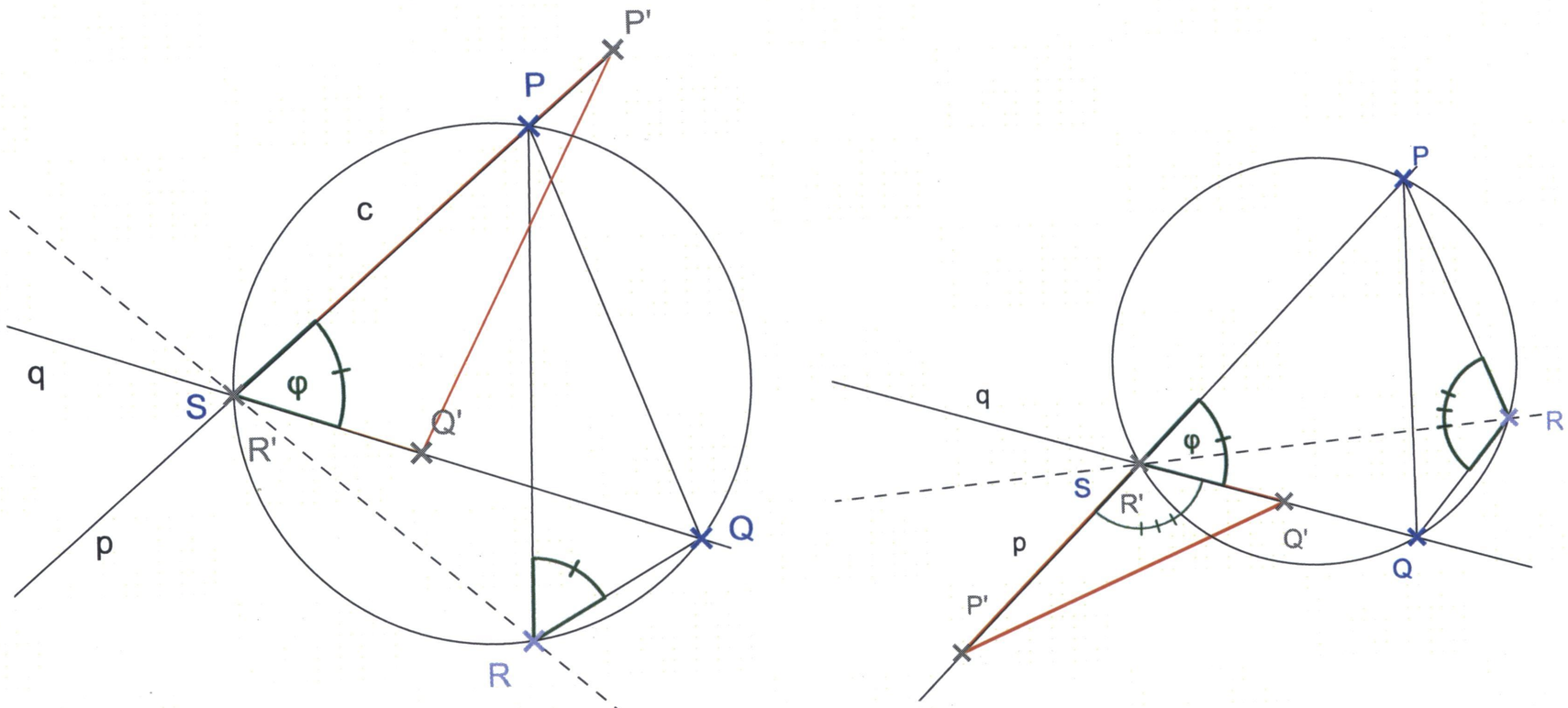
Deux cas sont possibles. Dans le premier cas, le triangle $P'Q'S$ est orienté négativement (c'est à dire $P'Q'SP'$ correspond aux parcours horaire du périmètre du triangle $P'Q'S$), voir Figure 6.3(a). Dans le cas contraire $P'Q'S$ est orienté positivement (Figure 6.3(b)). Le premier cas est possible si et seulement si le triangle PQR a aussi une orientation négative. Comme le côté $P'S$ du triangle $P'Q'S$ coïncide avec la droite p et le côté $Q'S$ coïncide avec la droite q, nous avons $\measuredangle Q'R'P' = \varphi = \measuredangle p, q$. Ceci est possible si et seulement si le point R appartient à l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ du cercle circonscrit de PQS.

Dans le deuxième cas (voir Figure 6.3(b)), le triangle $P'Q'S$ est orienté positivement, ce qui signifie l'orientation positive du triangle PQR. Dans ce cas, comme $P' \in p$ et $Q' \in q$ nous avons $\measuredangle Q'R'P' = \pi - \varphi = \measuredangle q, p$. Ceci est possible si et seulement si le point R appartient à l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{QP}}$ du cercle circonscrit de PQS.

Conséquemment, la trajectoire du point R est dégénérée à un segment de droite si et seulement si les points P, Q, R, et S sont cocycliques.

□

Théorème 6.3 permet de vérifier si un glissement (positif ou négatif) fait pénétrer un autre point d'obstacle O_k à l'intérieur du polygone P. D'habitude l'ellipse étant la trajectoire de O_k intersecte le côté du polygone sur lequel il est placé initialement (voir Figure 6.2(a)) ce qui empêche un glissement (par exemple positif) et permet l'autre glissement (négatif). Cependant, cette ellipse peut être tangente extérieurement au polygone (voir Figure 6.2(b)) ce qui n'empêche aucune parmi les deux



(a) orientation négative (b) orientation positive

FIGURE 6.3 – Glissement sur trois segments à la fois

glissements, ou tangente intérieurement (voir Figure 6.2(c)) empêchant chaque glissement (positif et négatif). Il est intéressant le cas quand cette ellipse est dégénérée à un segment aligné avec le côté du polygone (voir Figure 6.4).

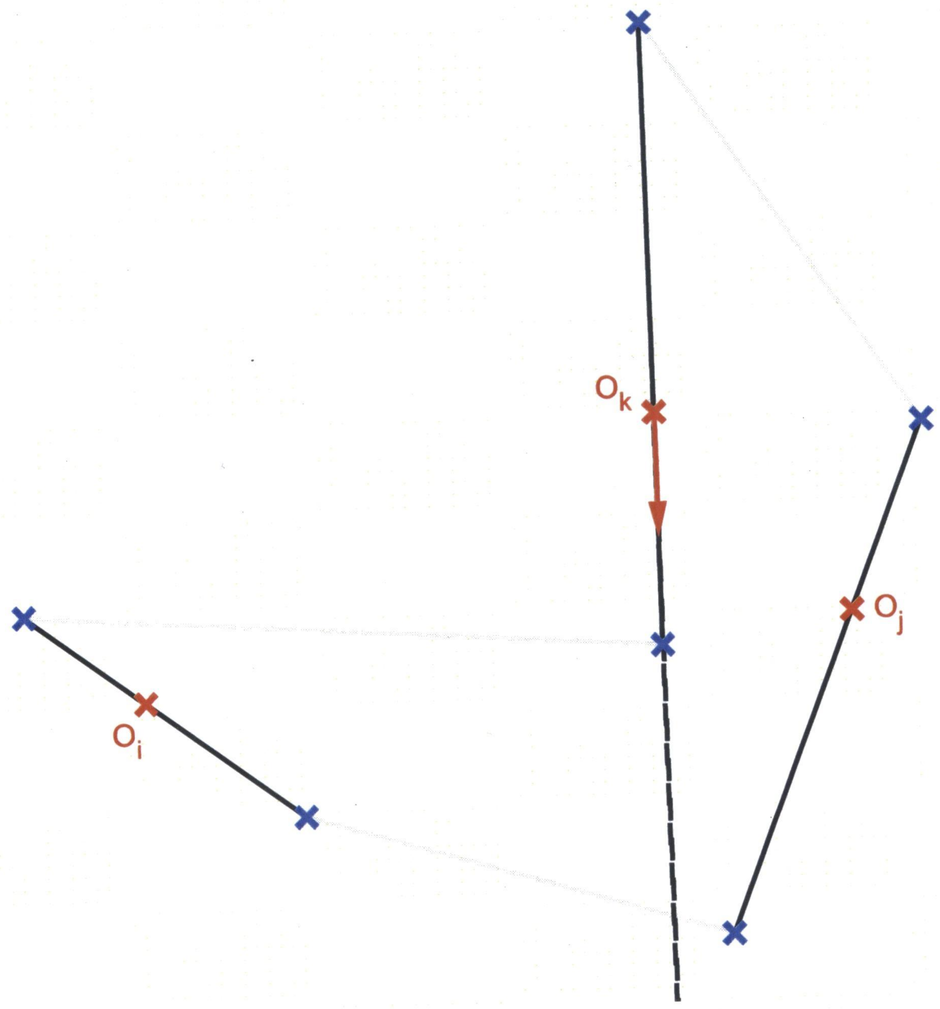


FIGURE 6.4 – Glissement sur O_i, O_j et O_k à la fois.

Cette situation est illustrée par le théorème 6.4. Il est facile de voir que théorème 6.3 implique le lemme suivant :

Lemme 6.5. *Prenons un glissement $G^+(P, O_i, O_j)$ (ou $G^-(P, O_i, O_j)$). En temps $\mathcal{O}(1)$ nous pouvons vérifier si un point d'obstacle O_k, $i \neq k \neq j$, empêche ou non le glissement $G^+(P, O_i, O_j)$ (respectivement $G^-(P, O_i, O_j)$).*

Démonstration. Il est suffisant de calculer l'ellipse donnée par théorème 6.3 et analyser la position de cette ellipse et son orientation par rapport au côté contenant le point O_k. □

Nous pouvons maintenant donner l'algorithme vérifiant si le polygone est immobilisé par l'ensemble de points d'obstacle $O = (O_1, \ldots, O_n)$.

Algorithme 2 : EstImmobilisé(P,O) boolean function EstImmobilisé(P,O)

Entrées : Un ensemble fini $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ de points d'obstacle, situés au bord du polygone P (sauf sommets)

Output : Si le polygone P est immobilisé par $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ ou pas

```
1  pour i ← 1 à n faire
2  |  pour j ← 1 à n faire
3  |  |  Imm ← false;
4  |  |  pour k ← 1 à n faire
5  |  |  |  si O_k empêche G+(P, O_i, O_j) alors
6  |  |  |  |  Imm ← true; break;
7  |  |  si Imm == false alors
8  |  |  |  retourner false;
9  |  |  sinon
10 |  |  |  Imm ← false;
11 |  |  pour k ← 1 à n faire
12 |  |  |  si O_k empêche G−(P, O_i, O_j) alors
13 |  |  |  |  Imm ← true; break;
14 |  |  si Imm == false alors
15 |  |  |  retourner false;
16 retourner true;
```

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.6. *La fonction EstImmobilisé calcule correctement en temps* $(O)(n^3)$ *si le polygone* P *est immobilisé par l'ensemble de points d'obstacle* O.

Démonstration. Nous allons prouver d'abord l'exactitude de la fonction. Le fragment de la fonction en lignes 3-15 s'exécute pour chaque paire d'indices (i, j), $i \neq j$,

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$, prenant en considération tout glissement $G(P, O_i, O_j)$. Si le glissement positif $G^+(P, O_i, O_j)$ n'est empêché par aucun point d'obstacle O_k, dans la boucle de lignes 4-6, ce glissement est un mouvement d'échappement et la fonction, en ligne 8, retourne correctement « false » ce qui signifie qu'il n'y a pas d'immobilisation. De façon similaire, si le glissement négatif $G^-(P, O_i, O_j)$ n'est empêché par aucun point d'obstacle O_k dans la boucle des lignes 11-13, ce glissement constitue un mouvement d'échappement. Conséquemment, pas d'immobilisation est retourné en ligne 15. Autrement, si chaque glissement positif et négatif est empêché par un point d'obstacle, par lemme 6.2 le polygone est immobilisé, ce qui est correctement rapporté en ligne 16 de la fonction.

Pour prouver la complexité algorithmique de la fonction, observons qu'elle est déterminée par le code des lignes 5-6 et 12-13. Par lemme 6.5 chaque exécution de ces lignes prend un temps constant. Comme ces instructions sont à l'intérieur de trois boucles imbriquées de complexité $\mathcal{O}(n)$, ceci montre que la complexité algorithmique de la fonction est $\mathcal{O}(n^3)$. □

Chapitre 7

Algorithme optimal vérifiant l'immobilisation en position quelconque

Dans ce chapitre nous proposons un algorithme plus avancé que le précédent. L'idée principale de l'algorithme est de considérer séparément les glissements positifs et négatifs et pour chaque cas garder la liste de points d'obstacle pour lesquels il y a des glissements pas encore empêchés par d'autres pointes. L'algorithme construit des listes de tels points et il s'avère que le glissement de deux points consécutifs sur une telle liste n'est empêché par aucun autre point d'obstacle. La construction d'une telle liste se fait en temps linéaire.

Avant de procéder avec les preuves formelles nous allons faire un couple d'observations :

Observation 7.1. *Pour ce que nous appelons « glissement positif » du polygone sur les points d'obstacle O_i, O_j le test si le glissement est empêché par le point O_k est équivalent avec le test « est-ce que le point d'intersection des droites support $\vec{n}_i$ et $\vec{n}_j$ se trouve dans le demi-plan droite de $\vec{n}_k$?*

Supposons que N est un ensemble de vecteurs normaux au périmètre du polygone aux points d'obstacle ordonnés par angle.

Observation 7.2. *Si dans l'ensemble N il y a 2 vecteurs consécutifs tel que l'angle orienté $\angle(\vec{n}_i, \vec{n}_{i+1}) \geq \pi$ alors le polygone n'est pas immobilisé et en plus de glissements le polygone peut être soumis a une translation sur n'importe quelle direction de $Rotation(\vec{n}_{i1} - \frac{\pi}{2})$ à $Rotation(\vec{n}_{i+1} + \frac{\pi}{2})$.*

Nous prouvons d'abord un lemme concernant trois points d'obstacle.

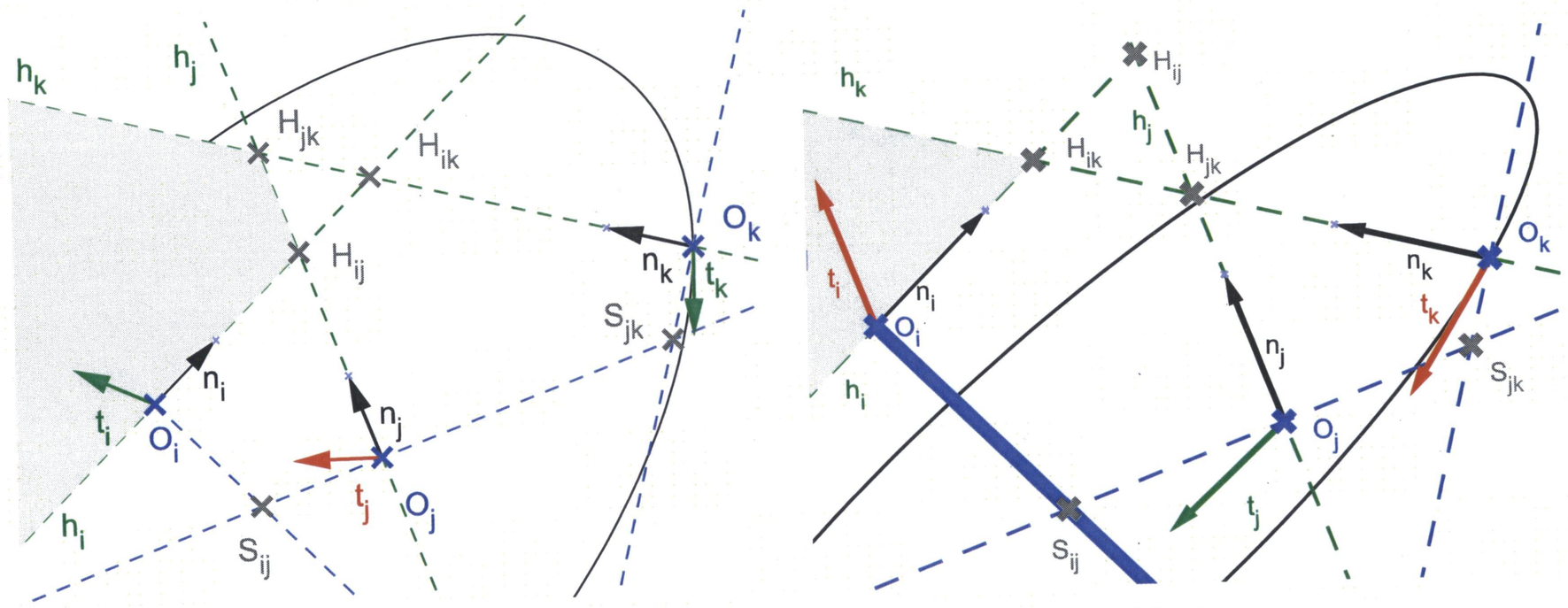
Lemme 7.3. *Supposons que trois points d'obstacle O_i, O_j, O_k ayant les trois vecteurs normaux vers l'intérieur du polygone $\vec{n}_i$, $\vec{n}_j$ et $\vec{n}_k$ sont tels que $0 < \widehat{\vec{n}_i\vec{n}_j} < \widehat{\vec{n}_i\vec{n}_k} < \pi$. Dans ce cas, si les trois points, tous à la fois, ne peuvent pas glisser sur leurs côtés respectives nous avons (voir Figure 7.1) :*

1) Soit le glissement positif (négatif) $G(P, O_i, O_k)$ n'est pas empêché par le point O_j, ou bien

2) le glissement positif (respectivement négatif) $G(P, O_i, O_j)$ n'est pas empêché par le point O_k et le glissement positif (respectivement négatif) $G(P, O_j, O_k)$ n'est pas empêché par le point O_i.

Démonstration. Considérons $G(P, O_i, O_j)$. Si le produit scalaire du vecteur tangent à l'ellipse au point O_k (l'ellipse étant la trajectoire du point O_k), dénoté par $\vec{t}_k$, et le vecteur $\vec{n}_k$ est plus petit que zéro alors le glissement sur les points O_i et O_j n'est pas empêché par le point O_k. Cette situation arrive quand le point d'intersection H_{ij} se trouve dans le demi-plan gauche déterminé par le vecteur $\vec{n}_k$. Compte tenu que $0 < \widehat{\vec{n}_i\vec{n}_j} < \widehat{\vec{n}_i\vec{n}_k} < \pi$ en tout le temps on a le triangle $H_{ij}H_{ik}H_{jk}$ orienté positif (antihoraire) et en plus de fait que le polygone n'est pas immobilisé on a que l'intersection de 3 demi-plans gauches déterminés par $\vec{n}_i$, $\vec{n}_j$ et $\vec{n}_k$ est une zone non borné du plan. Supposons que les trois points H_{ij}, H_{ik} et H_{jk} ne coïncident pas. Danc ce cas H_{ik} ne se trouve pas sur le bord de cette zone et donc le glissement sur O_i et O_k est empêché par O_j, soit on a juste H_{ik} sur ce bord et donc les deux autres glissements ne sont pas permises (voir Figure 7.1(b)).

Supposons alors que les trois points H_{ij}, H_{ik} et H_{jk} coïncident (voir Figure 7.2). Dans ce cas les 3 produits scalaires $\vec{t}_i \cdot \vec{n}_i$, $\vec{t}_j \cdot \vec{n}_j$ et $\vec{t}_k \cdot \vec{n}_k$ sont zéro, c'est à dire les ellipses sont tangentes aux côtés du polygone. Comme par Théorème 6.3 le centre de l'ellipse tracé par le point O_k est le point S_{ij} - l'intersection des droites i et j -, le triangle $S_{ij}S_{ik}S_{jk}$ a un ou deux points sur le bord de la zone de positions libre déterminée par les côtés i, j et k. Observons que ce triangle ne peut pas être dégénéré



(a) Glissement possible sur 2 paires : (O_i,O_j) et (O_j,O_k)

(b) Glissement possible juste sur la paire (O_i,O_k)

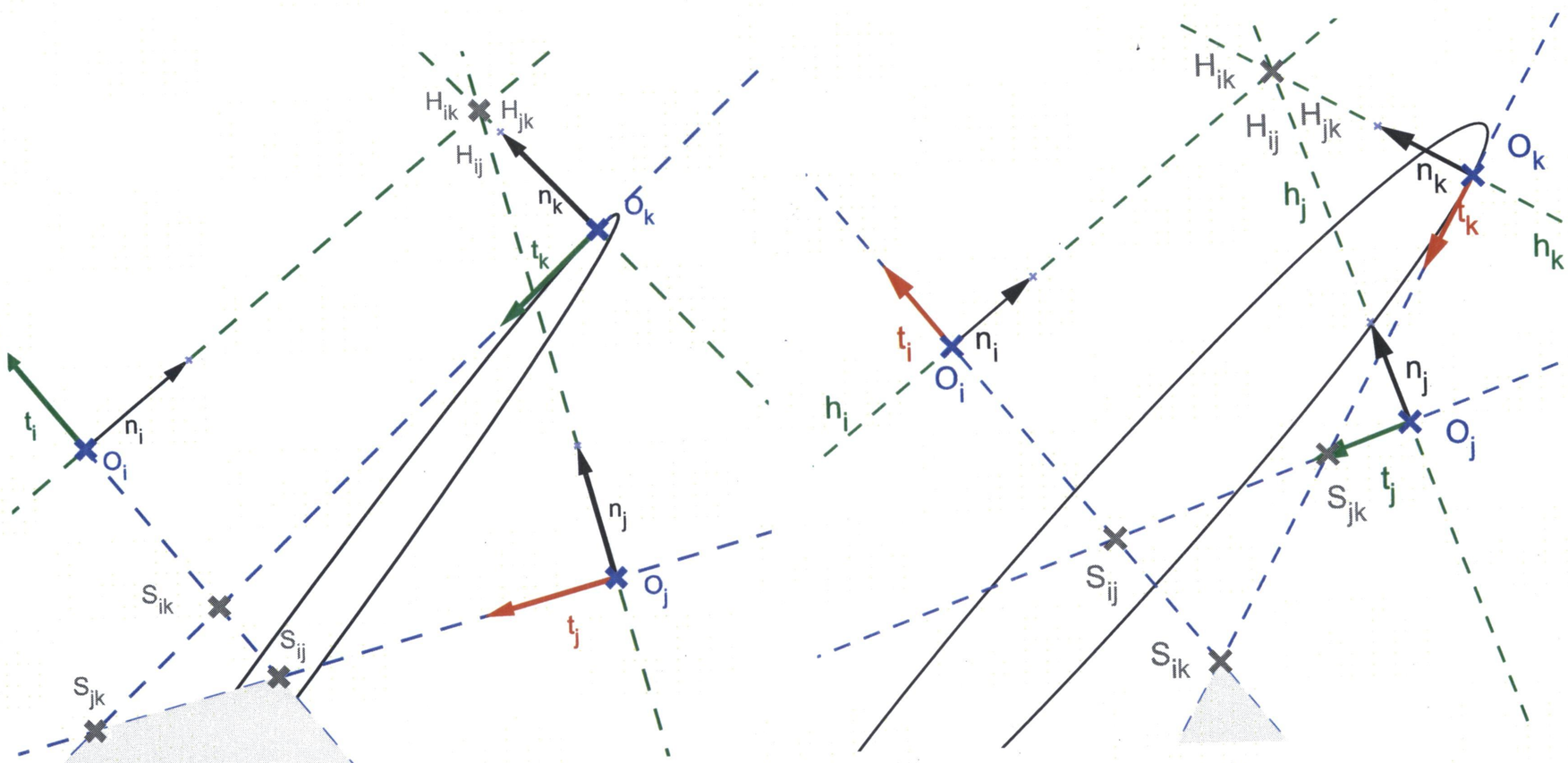
FIGURE 7.1 – Triangle $H_{ij}H_{ik}H_{jk}$ non dégénéré

a un point, puisque par théorème 6.3 les trois points pourraient glisser à la fois sur les côtés respectives. Si le triangle a juste un point sur le bord de cette zone alors le glissement sur la paire (O_i,O_k) implique que les glissements sur les deux autres paires (O_i, O_j) et (O_j, O_k) ne sont pas possibles. Si le triangle a deux points sur ce bord alors le glissement est possible sur les paires (O_i,O_j) et $(O_j,\ O_k)$.

□

Le lemme suivant permet d'étendre la considération du lemme précédent sur une liste de points.

Lemme 7.4. *Supposons que nous avons k points d'obstacle $O_1, \cdots, O_k$ en ordre de leur vecteurs normaux de sorte que $0 < \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2} < \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_3} < \cdots < \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_{k-1}} < \pi$ et que chaque glissement $G(P, O_i, O_{i+1})$ pour $i = 2, \cdots, k-2$ n'est pas empêché ni par O_{i-1} ni par O_{i+2}. Dans ce cas, soit*



(a) Glissement possible sur 2 paires : (O_i,O_j) et (O_j,O_k)

(b) Glissement possible juste sur la paire (O_i,O_k)

FIGURE 7.2 – H_{ij}, H_{ik} et H_{jk} coïncident

1) le glissement positif (respectivement négatif) $G^+(P, O_{k-1}, O_k)$ *n'est empêché par aucun point* O_i*, pour* $i = 1, \cdots, k-2$.

2) Il n'y a aucun glissement d'échappement positif (respectivement négatif) impliquant le point O_{k-1}.

Démonstration. Supposons que le glissement $G^+(P, O_{k-1}, O_k)$ n'est pas empêché par le point O_{k-2} (voir Figure 7.3(a)).

En ce moment la, le point X d'intersection des normales au points d'obstacle O_{k-1} et O_k se trouve à gauche du point Y - le point d'intersection des normales au points O_{k-1} et O_{k-2}. Comme tous les points d'intersection de normales aux points O_i et O_{i+1}, pour $i = 1, 2, \cdots, k-3$, se trouvent à droite de Y, ça prouve le point 1)

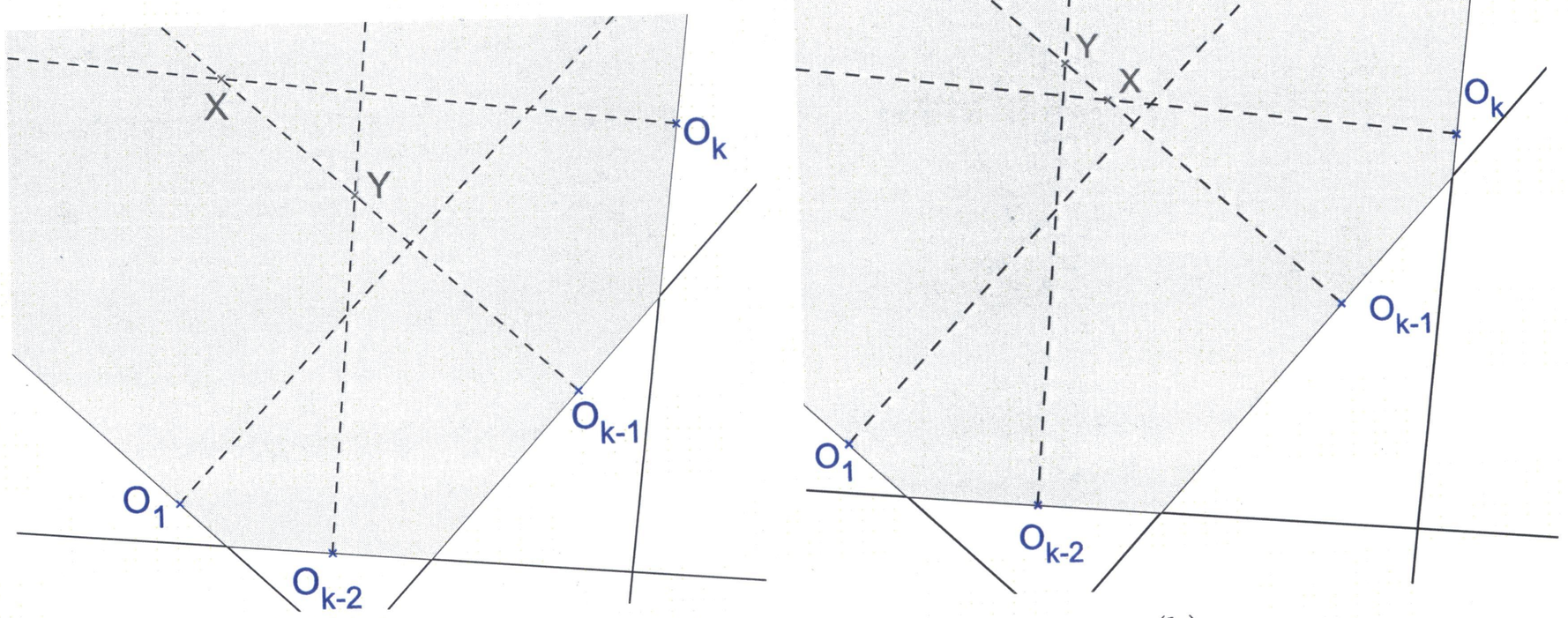


FIGURE 7.3 – Section horizontale dans l'espace de configuration

du lemme.

Supposons alors que le glissement $G^+(P, O_{k-1}, O_k)$ est empêché par le point O_{k-2} (voir Figure 7.3(b)). Ce glissement correspond à une rotation infinitésimale centrée sur la normale au point O_{k-1}. Cependant les rotations à droite du point Y sont empêchées par le point d'obstacle O_{k-2} et ceux à droite du point X sont empêchées par le point O_k. Comme X est à droite de Y ceci prouve le point 2) du lemme. L'argument est vrai aussi si les points X et Y coïncident.

La preuve pour les glissements négatifs est symétrique. □

Comme conséquence des lemmes 7.3 et 7.4 nous avons immédiatement le lemme suivante :

Lemme 7.5. *Supposons que* $L = \{O_{i_1}, \cdots, O_{i_p}\}$ *est une sous-séquence de* $O_1, \cdots, O_n$, *L - la liste générée par l'algorithme 4 jusqu'au début de la ligne 24. Dans ce cas*

1) Le glissement positif (négatif) $G^+(P, O_{i_s}, O_{i_{s+1}})$ (respectivement $G^-(P, O_{i_s}, O_{i_{s+1}})$) n'est empêché par aucun point d'obstacle O_i, pour $i = 1, \cdots, k$.

2) Chaque glissement positif (négatif) impliquant un point d'obstacle O_r, qui N,est pas dans la liste L est empêché par au moins un point appartenant à la liste L.

Théorème 7.6. *L'algorithme 4 décide correctement en temps $O(n \log n)$ si l'ensemble de points d'obstacle $O_1, \cdots, O_n$ immobilise ou non le polygone P.*

Démonstration. Le polygone P est immobilisé par $O_1, \cdots, O_n$ si et seulement s'il n'existe aucun glissement d'échappement $G(P, O_i, O_j), 1 \leq i, j \leq n$. Si à la fin de la ligne 17 de l'algorithme la liste L est vide alors par la lemme 7.5 il n'existe aucune glissement positif d'échappement. En ce moment notre algorithme retourne la liste de points qui empêchent les glissement positifs et négatifs. Si la liste L n'est pas vide, alors clairement, par le même lemme, le glissement positif sur deux points d'obstacle consécutifs de la liste L constitue un mouvement d'échappement. De façon similaire, par lemme 7.5 si L est vide dans la ligne 17 alors il n'existe aucun glissement négatif d'échappement. Également, si la liste L n'est pas vide le glissement négatif rapporté est un mouvement d'échappement.

Pour déterminer la complexité de l'algorithme observons que l'ensemble de points d'obstacle, ordonné par l'angle du vecteur normal au périmètre du polygone P peut être obtenu en temps $O(n \log n)$. Analysons maintenant le traitement de la liste L. Ça prend un temps $O(1)$ pour déterminer si un point d'obstacle doit être ajouté, ou

non, à la liste L. Comme chaque point peut être inséré au plus une fois, et supprimé aussi au plus une fois de la liste L, le traitement associé aux insertions et suppressions de la liste L prends un temps $O(n)$. □

La preuve du théorème 7.6 nous permets de constater le corollaire suivant :

Corollaire 7.7. *Algorithme 4 fonctionne en temps $O(n)$ si la liste de points d'obstacle est donnée ordonnée par l'angle du vecteur normal au périmètre.*

Il est connue, voir [2], que chaque polygone sans côtés parallèles peut être immobilisé par trois points d'obstacle et les polygones avec côtés parallèles peuvent nécessiter quatre points pour être immobilisés. Cependant ceci nécessite de les placer dans des postions bien déterminées. Notre algorithme retourne six, sept ou huit points d'immobilisation, si l'ensemble de points d'obstacle $O = \{O_1, \cdots, O_n\}$ immobilise le polygone. Il est intéressant d'observer que six points d'immobilisation sont parfois nécessaires, ce qui montre le théorème suivant :

Théorème 7.8. *Il existe un ensemble de six points d'obstacle qui immobilise le polygone tel que aucun point ne peut être supprimé sans que un mouvement d'échappement devient possible.*

Démonstration. Considérons l'exemple de la Figure 7.4. Il est possible de montrer qu'aucune centre de rotation (positive ou négative) ne correspond à un glissement d'échappement. Nous allons montrer que l'élimination de n'importe quel point d'obstacle A, B, C, D, E ou F résultera en existence d'un mouvement d'échappement.

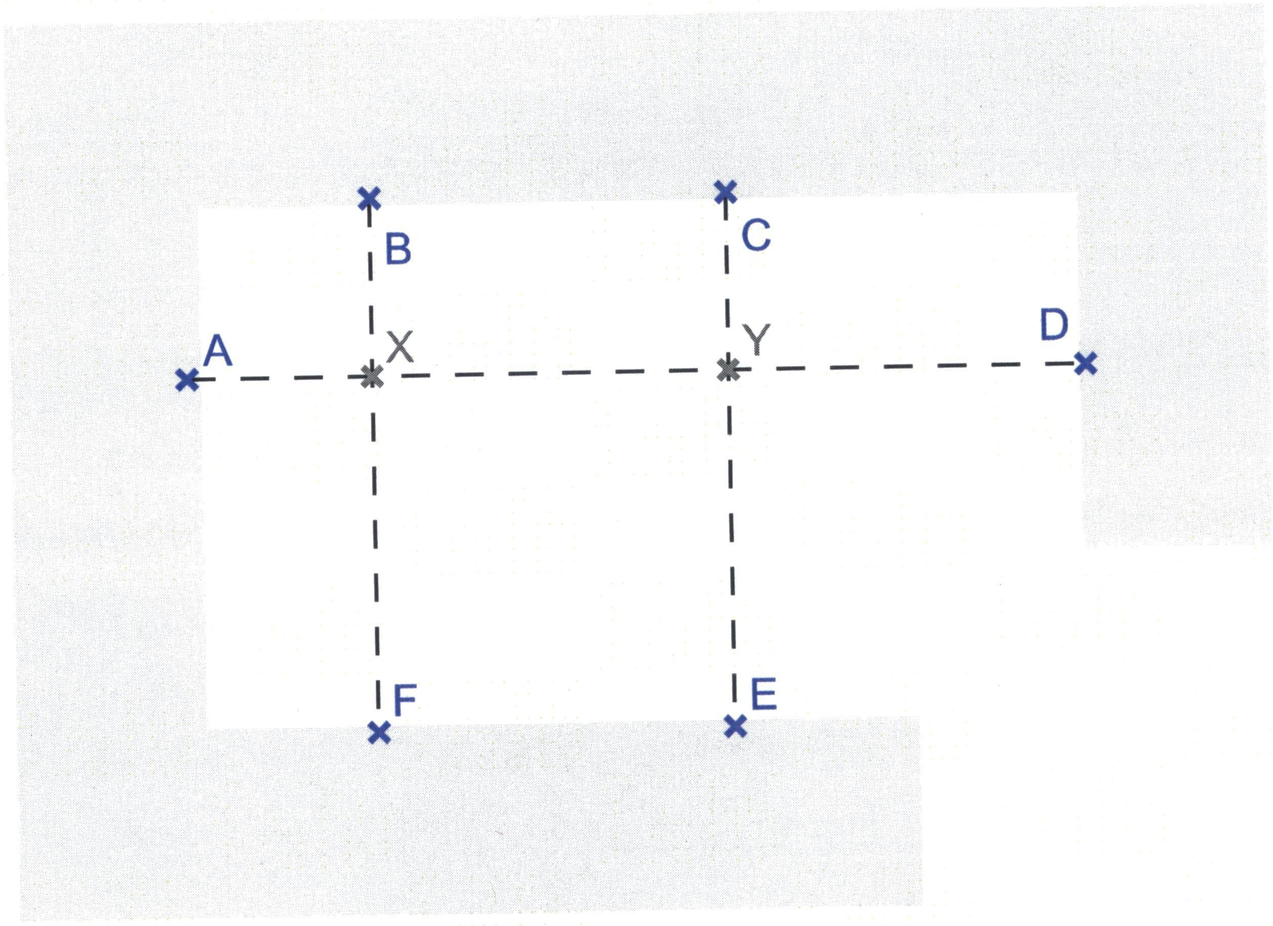


FIGURE 7.4 – L'exemple d'un polygone immobilisé par six points, tous nécessaires pour l'immobilisation.

Par symétrie il suffit de considérer juste les trois points A , B, C. L'élimination du point A permet de translater le polygone dans la direction de la droite BC. L'élimination du point B permet la rotation positive centré à Y. Par contre, l'élimination du point C permet une rotation négative centré au point X. □

Au cas ou trois points d'obstacle sont positionnés tel que leurs perpendiculaires sur les côtés du polygone passent par le même point H (voir Figure 7.5) et les prolongements des côtes s'intersectent dans un point I alors on a le cas où le polygone glisse sur les trois points d'obstacle à la fois.

Nous allons donné un algorithme qui détermine si l'ensemble des points d'obstacle immobilise le polygone.

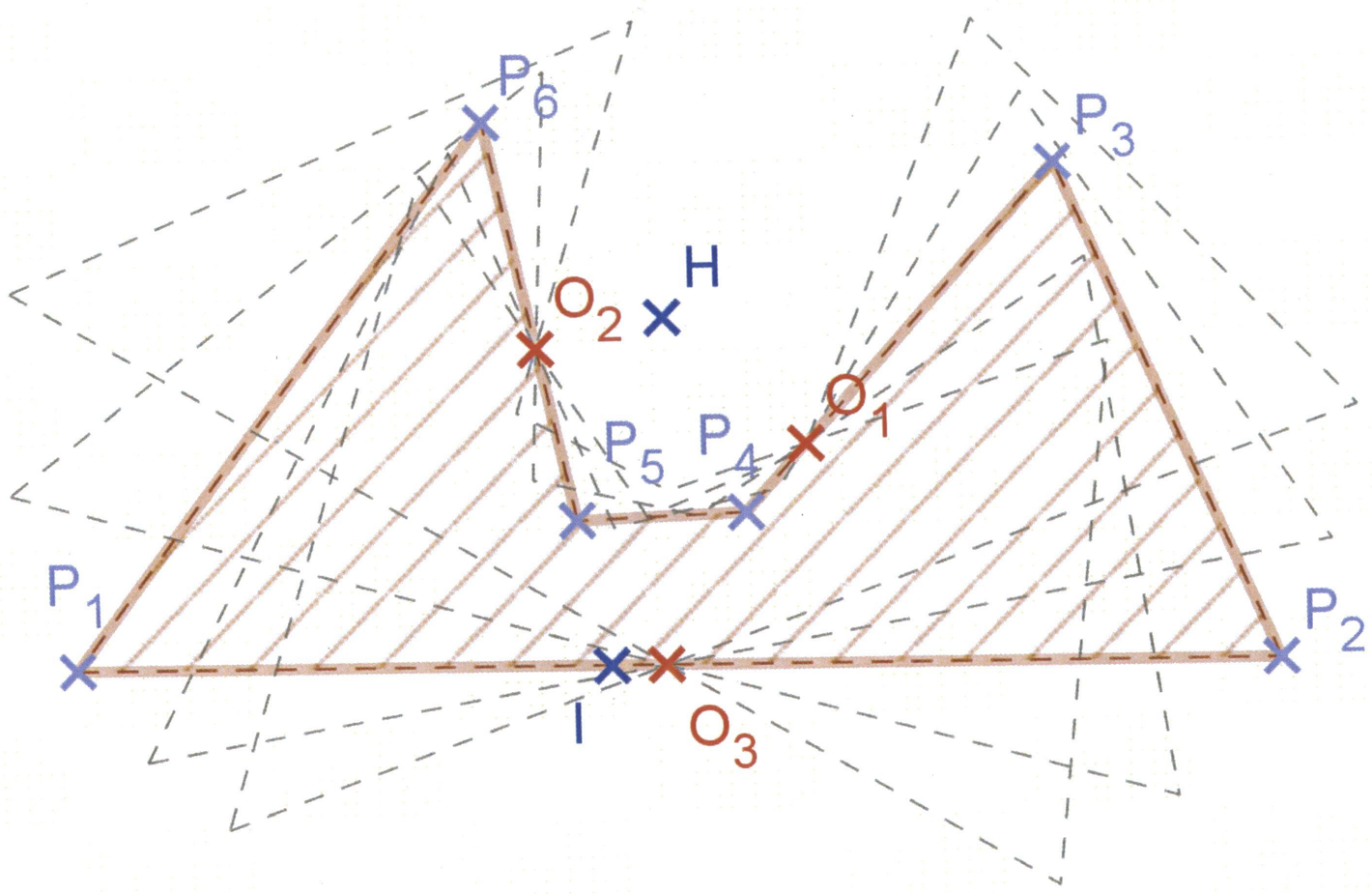


FIGURE 7.5 – L'exemple d'un polygone emprisonné tel que le seul mouvement d'échappement est le glissement sur 3 points à la fois.

Algorithme 3 : IMMPQO Détermine si le polygone est immobilisé ou pas.

Entrées : Un ensemble fini, non vide $O = \{\{O_1, \vec{n}_1\}, \{O_2, \vec{n}_2\}, \ldots, \{O_m, \vec{n}_m\}\}$ de points d'obstacle, situés au bord du polygone P (sauf sommets). Pour chaque point d'obstacle on a le vecteur unitaire perpendiculaire sur le bord du polygone, orienté vers l'intérieur.

Output :

```
Trier l'ensemble de points d'obstacle par ordre croissante de vecteurs normaux.
si GlissPositifPossible(P,O) ou GlissNegativesPossible(P,O) alors
    retourner "Le polygone P n'est pas immobilisé"
sinon
    L ← RL retourné par GlissPositifPossible(P,O) ∪ RL retourné par
      GlissNegativesPossible(P,O)
    pour i=longueur(LP) à 1 pas -1 faire
        si EstImmobilise(P, L\{O_i}) alors
            L ← L\{O_i}
    retourner "Le polygone P est immobilisé"
```

L'algorithme appele les fonctions *GlissPositifPossible* et *GlissNegatifPossible* qui déterminent s'ils existent les glissements d'échappement positifs ou négatifs, respectivement. La fonction GlissPositifPossible est donné ci-dessous. La fonction symétrique GlissNégatifPossible, est donnée en annexe.

Algorithme 4 : fonction GlissPositifPossible(P,O)

Entrées : O - la liste triée de points d'obstacle, situés au bord du polygone P (sauf sommets).

Output : - la liste de points de glissement positif permis.

```
1  L ← {O_1, O_2} ; O ← {O_3, ··· , O_n} ;
   /* Variables:                                                    */
   /* - O_1 - indiques le premier élément de la liste L            */
   /* - O_2 - indiques le deuxième élément de la liste L           */
   /* - O_a - l'avant-dernière élément de la liste L               */
   /* - O_d - le dernière élément de la liste L                    */
   /* - O_k - le premier élément de la liste O.                    */
2  RL ← L ;
3  si ∠(n_1, n_2) ≥ π alors
4      retourner "Le polygone n'est pas immobilisé"
5  tant que O ≠ ∅ faire
6      si ∠(n_1, n_d) ≥ π alors
7          si O_1 n'empêche pas G+(P, O_d, O_k) alors
8              tant que ∠(n_a, n_k) < π et (O_k empêche G+(P, O_a, O_d)) faire
9                  L ← L\{O_d}        /* Élimine des éléments de la fin de
                                          liste */
10             tant que ∠(n_k, n_2) < π et g+(O_k, O_1; O_2) faire
11                 Elimine O_1 ; MisAJoour O_1, O_2 ;
12             tant que ∠(n_k, n_2) < π et (O_2 empêche G+(P, O_k, O_1)) faire
13                 L ← L\{O_1}        /* Élimine des éléments du début de la
                                          liste */
14             L ← L ∪ {O_k} ;
15             si O_1 empêche G+(P, O_a, O_d) alors
16                 RL ← L ;
17                 retourner "Touts les glissements du P sont empêchés par au
                              moins un point de RL"
18     sinon
19         tant que O_a empêche G+(P, O_d, O_k) faire
20             L ← L\{O_d}
21         L ← L ∪ {O_k} ;
22     O ← O\{O_k}                    /* Élimine O_k, le premier élément de O */
23 RL ← L ;
24 retourner "Glissement positif possible !"
```

Chapitre 8

Conclusions

Nous avons proposé des algorithmes qui vérifient si un ensemble donné de points d'obstacle immobilise le polygone. Notre texte présente trois algorithmes. Le premier algorithme, en temps $O(n)$, fonctionne seulement si les données d'entrée sont en position générale. Le second algorithme fonctionne en tous les cas en temps $O(n^3)$. Le dernier algorithme, le plus avancé, est une amélioration du traitement en cas général fonctionnant en temps $O(n \log n)$. Comme un produit dérivé du notre travail nous avons observé et caractérisé les situations ou le seul mouvement d'échappement du polygone est un mouvement de glissement pendant lequel trois (ou plus) de points d'obstacle restent en contact continue avec le périmètre du polygone.

Bibliographie

[1] Jean-Pierre AUBIN, Rolland GLOWINSKI et Jacques-Louis LIONS : *Mathematics at a glance.* Pagoulatos Athènes, 1980.

[2] Jurek CZYZOWICZ, Ivan STOJMENOVIC et Jorge URRUTIA : Immobilizing a shape in the plane. *In* Thomas SHERMER, éditeur : *Proceedings of the Third Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 41–45, Vancouver, British Columbia, Canada, August 6–10 1991.

[3] Jurek CZYZOWICZ, Ivan STOJMENOVIC et Jorge URRUTIA : Immobilizing a shape. *International Journal of Computational Geometry and Applications (IJCGA)*, 9(2):181–206, 1999.

[4] Hao DANG et Peter K. ALLEN : Stable grasping under pose uncertainty using tactile feedback. *Autonomous Robots*, 36(4):309–330, 2014.

[5] Guidobaldo Bourbon del MONTE : *Planisphaeriorum Universalium Theorica.* Pisauri, 1579.

[6] Wlodzimierz KUPERBERG : Immobilisation and caging polygons, dimacs work-

shop on polytopes. *Rutgers University*, January 1990.

[7] Tomás LOZANO-PÉREZ : Spatial planning : A configuration space approach. *IEEE Transactions on Computers*, C-32(2):108–120, February 1983.

[8] Jeffrey MAHLER, Sachin PATIL, Ben KEHOE, Jur van den BERG, Matei T. CIOCARLIE, Pieter ABBEEL et Ken GOLDBERG : Grasp planning with shape uncertainty using gaussian process implicit surfaces and sequential convex programming. *In International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, USA*, pages 4919–4926, May 2015.

[9] Xanthippi MARKENSCOFF, Luqun NI et Christos H. PAPADIMITRIOU : The geometry of grasping. *Int. J. Rob. Res.*, 9(1):61–74, 1990.

[10] Matthew T. MASON : *Mechanics of robotic manipulation*. Intelligent Robotics and Autonomous Agents Series, MIT Press, Cambridge, MA, USA, August 2001.

[11] Nimrod MEGIDDO : Linear programming in linear time when the dimension is fixed. *J. ACM*, 31(1):114–127, January 1984.

[12] Bhubaneswar MISHRA, Jacob T. SCHWARTZ et Micha SHARIR : On the existence and synthesis of multifinger positive grips. *Algorithmica*, 2:541–558, 1987.

[13] Van-Duc NGUYEN : The synthesis of stable grasps in the plane. *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference*, 3:884–889, avril 1986.

[14] Joseph O'ROURKE : Computational geometry column 9. *SIGACT News*, 21(1): 18–21, January 1990.

[15] Florian T. POKORNY, Johannes A. STORK et Danica KRAGIC : Grasping objects with holes : A topological approach. *In International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference*, pages 1100–1107, May 2013.

[16] Johann RADON : Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, 83(1-2):113–115, 1921.

[17] Franz REULEAUX : *The Kinematics of Machinery. Outlines of a Theory of Machines*. Macmillan & Co., London, 1876.

[18] Elon RIMON et Joel W. BURDICK : Mobility of bodies in contact. i. A 2nd-order mobility index for multiple-finger grasps. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(5):696–708, 1998.

[19] Amy SHELL-GELLASCH : *Hands on History : A Resource for Teaching Mathematics*. MAA notes. Mathematical Association of America, 2007.

[20] Frans van SCHOOTEN : *Eerste Bouck der Mathematische Oeffeningen, Begrijpende Difftigh Arithmetische, en Difftigh Geometrische Doorstellen, 4. Tuychwerckelijcke beschrijving van Kegelsneden*. Gerrit van Goedesburgh, Amsterdam, 1659.

[21] John E. WETZEL et Ed SCHEINERMAN : An ancient elliptic locus. *American Mathematical Monthly*, 117(2):161–167, février 2010.

Annexe A

Test Glissements Négatifs

Algorithme 5 : fonction TestGlissPosOiOj

Entrées : O_i,n_i,O_j,n_j,O_k,n_k - trois points d'obstacle, situés au bord du polygone P (sauf sommets).

Output : - la liste de points de glissement négatif permis.

/* - Trouver le vecteur tangent à la trace marqué par le point O_k pendent le glissement positif du polygone P sur les points O_i et O_j à la fois. */

si $(\vec{n}_i \parallel \vec{n}_j)i$ **alors**
  $\vec{t}$=Rotate($\vec{n}_i$, 90°)
sinon
  /* Trouver le point d'intersection de deux perpendiculaires en O_i et O_j et le point d'intersection de deux côtés prolongés. */
  $H = Ligne(O_i, \vec{n}_i) \cap Ligne(O_j, \vec{n}, j)$;
  $S = LignePerpendiculaire(O_i, \vec{n}_i) \cap LignePerpendiculaire(O_j, \vec{n}, j)$
  si $H == O_k$ **alors**
    /* Si le point d'obstacle O_k coïncide au point H - l'ellipse est dégénérée à un segment. */
    $\vec{t} = \overrightarrow{HS}$
  sinon
    $\vec{t} = Rotate(\overrightarrow{HO_k}, 90°)$
suivant $\vec{t} \cdot \vec{n}_k$ **faire**
  cas où >0 **faire**
    retourner *"O_k empêche le glissement positif sur O_i et O_j à la fois"*
  cas où <0 **faire**
    retourner *"O_k permets le glissement positif sur O_i et O_j à la fois"*
  cas où $==0$ **faire**
    si $\overrightarrow{O_kS} \cdot \vec{n}_k > 0$ **alors**
      retourner *"O_k empêche le glissement positif sur O_i et O_j à la fois"*
    sinon
      retourner *"O_k permets le glissement positif sur O_i et O_j à la fois"*

Algorithme 6 : fonction GlissNégatifPossible(P,O)

Entrées : O - la liste triée de points d'obstacle, situés au bord du polygone P (sauf sommets).

Output : - la liste de points de glissement négatif permis.

```
1  L ← {O_1, O_2}; O ← {O_3, ··· , O_n};
   /* Variables:                                                    */
   /* - O_1 - indiques le premier élément de la liste L            */
   /* - O_2 - indiques le deuxième élément de la liste L           */
   /* - O_a - l'avant-dernière élément de la liste L               */
   /* - O_d - le dernière élément de la liste L                    */
   /* - O_k - le premier élément de la liste O.                    */
2  RL ← L;
3  si ∠(n_1, n_2) ≥ π alors
4  |  retourner "Le polygone n'est pas immobilisé"
5  tant que O ≠ ∅ faire
6  |  si ∠(n_1, n_d) ≥ π alors
7  |  |  si O_1 n'empêche pas G⁻(P, O_d, O_k) alors
8  |  |  |  tant que ∠(n_a, n_k) < π et (O_k empêche G⁻(P, O_a, O_d)) faire
9  |  |  |  |  L ← L\{O_d}        /* Élimine des éléments de la fin de
   |  |  |  |                        liste */
10 |  |  |  tant que ∠(n_k, n_2) < π et (O_2 empêche G⁻(P, O_k, O_1)) faire
11 |  |  |  |  L ← L\{O_1}        /* Élimine des éléments du début de la
   |  |  |  |                        liste */
12 |  |  |  L ← L ∪ {O_k};
13 |  |  |  si O_1 empêche G⁻(P, O_a, O_d) alors
14 |  |  |  |  RL ← L;
15 |  |  |  |  retourner "Touts les glissements du P sont empêchés par au
   |  |  |  |    moins un point de RL"
   |  |  .
16 |  sinon
17 |  |  tant que O_a empêche G⁻(P, O_d, O_k) faire
18 |  |  |  L ← L\{O_d}
19 |  |  L ← L ∪ {O_k};
20 |  O ← O\{O_k}                 /* Élimine O_k, le premier élément de O */
21 RL ← L;
22 retourner "Glissement négatif possible !"
```